Wintersemester 2011/12
Juniorprofessor Dr. S. Held
Dr. U. Brenner

Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Universität Bonn

Lineare und ganzzahlige Optimierung

Übungszettel 5

Aufgabe 1:
Lösen Sie das folgende LP schriftlich mit dem Simplexalgorithmus (Algorithmus 3) unter Verwendung von Blands Regel. Schreiben Sie für jede Iteration detailliert die Schritte BTRAN, PRICING, FTRAN, RATIO-Test und Update auf. Fügen Sie zunächst Schlupfvariablen ein und verwenden Sie diese als Startbasis.

$$\begin{array}{lrl} \max & -x_1 + 4x_2 & \\ s.d. & x_1 - x_2 & \leq 2 \\ & -x_1 + x_2 & \leq 1 \\ & x_1, x_2 & \geq 0 \end{array}$$

4 Punkte

Aufgabe 2:
Lösen Sie das folgende LP mit der Tableau-Version des Simplexalgorithmus unter Verwendung von Dantzigs Pivotregel. Bei Nichteindeutigkeit verwenden Sie die linke Spalte bzw. obere Zeile. Schreiben Sie für jede Iteration das Simplextableau auf und markieren Sie jeweils ein- und austretende Variablen. Fügen Sie zunächst Schlupfvariablen ein und verwenden Sie diese als Startbasis.

$$\begin{array}{lrcrl} \max & x_1 & + & x_2 & \\ s.d. & x_1 & & & \leq 4 \\ & & & x_2 & \leq 6 \\ & \frac{1}{4}x_1 & - & x_2 & \leq 0 \\ & \frac{1}{2}x_1 & + & x_2 & \leq 7 \\ & x_1 & , & x_2 & \geq 0 \end{array} \tag{1}$$

4 Punkte

Aufgabe 3:
Es seien $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph mit Kantenkapazitäten $u : E \to \mathbb{K}_+$ und $s, t \in V$ zwei ausgewählte Knoten. Es sei ferner

$$\mathcal{P} := \{P \subseteq E \,:\, P \text{ ist die Kantenmenge eines s-t-Pfad}\}.$$

Betrachten Sie folgendes LP

$$\begin{array}{lll} \max & \sum_{P \in \mathcal{P}} y_P & \\ s.d. & \sum_{P \in \mathcal{P}: e \in P} y_P \leq u_e & \forall e \in E \\ & y_p \geq 0 & \forall P \in \mathcal{P}. \end{array} \tag{P}$$

1. Schreiben Sie das duale (D) zu (P) auf und geben Sie eine graphentheoretische Interpretation von (D) und (P). (2 Punkte)

2. Geben Sie eine Klasse von Graphen an, für die Anzahl der Pfade $|\mathcal{P}|$ nicht polynomiell durch $|V| + |E|$ beschränkt werden kann. (1 Punkte)

3. Formulieren Sie in ein äquivalentes Programm, in dem die Anzahl der Variablen und Nebenbedingungen linear durch $|V| + |E|$ beschränkt ist. (2 Punkte)

Aufgabe 4: (Dualer Simplexalgorithmus)
Gegeben sei ein LP $\max\{c^\intercal x \,:\, Ax = b, x \geq 0\}$, das nicht unbeschränkt ist und bei dem A vollen Zeilenrang hat. Betrachten Sie folgenden Algorithmus, der neben dem LP eine dual zulässige Basis B, d.h. $z_N = c_N - A_N^\intercal A_B^{-\intercal} c_B \leq 0$ (siehe Definition 5.2) als Eingabe erhält.

BTRAN:
Löse $A_B x_B = b$

PRICING:
Falls $x_B \geq 0$,**Stop**. Andernfalls wähle ein $i \in \{1, \ldots, m\}$ mit $x_{B_i} < 0$.

FTRAN:
Löse $A_B^\intercal w = e_i$ und berechne $\alpha_N = A_N^\intercal w$.

RATIO-Test:
Falls $\alpha_N \geq 0$, **Stop**. Andernfalls wähle ein

$$j = \arg\min \left\{ \frac{z_k}{\alpha_k} \,:\, \alpha_k < 0, k \in N \right\}, \text{ und setze } \gamma = \frac{z_j}{\alpha_j}.$$

Update:

$$\begin{aligned} z_N &\leftarrow z_N - \gamma \alpha_N, & z_{B_i} &\leftarrow -\gamma, \\ N &\leftarrow N \setminus \{j\} \cup \{B_i\}, & B_i &\leftarrow j \quad (\text{somit } B \leftarrow B \setminus \{B_i\} \cup \{j\}). \end{aligned}$$

Gehe zu **BTRAN**.

Zeigen Sie

1. Stoppt der Algorithmus im PRICING Schritt, so ist B eine optimale Basis und x_B zusammen mit $x_N = 0$ eine optimale Basislösung für (P). (2 Punkte)

2. Stoppt der Algorithmus im RATIO-Test Schritt, so ist $P^=(A, b) = \emptyset$. (2 Punkte)

3. Der UPDATE-Schritt überführt eine dual zulässige Basis B in eine neue Basis die wiederum dual zulässig ist. (3 Punkte)

Abgabetermin ist **Dienstag, der 22.11.2011**, vor der Vorlesung (12:15).