Wintersemester 2011/12 | Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Juniorprofessor Dr. S. Held | Universität Bonn
Dr. U. Brenner

Lineare und ganzzahlige Optimierung

Übungszettel 4

Aufgabe 1: C sei ein konvexer Kegel und $-C$ sei der Kegel $\{x : -x \in C\}$. Wir nennen $L = (C \cap -C)$ den *Linienraum* von C.

a) Zeigen Sie, dass $\bar{C} = C \cap L^\perp$ mit $L^\perp = \{u \ : \ u^\intercal x = 0 \ \forall x \in L\}$ ein spitzer Kegel ist und dass C die direkte Summe seines Linienraumes L und des spitzen Kegels $\bar{C}$ ist, also
$$C = (C \cap L^\perp) \oplus L.$$
(2 Punkte)

b) Zeigen Sie, dass jedes Polyeder P eine Zerlegung $P = (Q + C) \oplus L$ besitzt, wobei Q ein Polytop, C ein spitzer Kegel und L ein Untervektorraum sind.

(3 Punkte)

Aufgabe 2: Es sei P ein rationales Polyeder und F eine Seitenfläche von P. Zeigen Sie, dass
$$C := \{c \ : \ c^\intercal z = \max\{c^\intercal x \ : \ x \in P\} \text{ für alle } z \in F\}$$
ein rationaler polyedrischer Kegel ist. (5 Punkte)

Aufgabe 3: Es sei $H = (V, E)$ ein *Hypergraph*, d.h. V ist eine endliche Menge von Knoten und $E \subseteq 2^V$. Ferner seien $F \subseteq V$ und $x, y : F \to \mathbb{R}$. Bestimme $x, y : V \setminus F \to \mathbb{R}$ (die Erweiterung auf ganz V), so dass
$$\sum_{e \in E} (\max_{v \in e} x(v) - \min_{v \in e} x(v) + \max_{v \in e} y(v) - \min_{v \in e} y(v))$$
minimal ist. Geben Sie hierfür eine LP-Formulierung an und dualisieren Sie diese.
Bemerkung: Hierbei handelt es sich um eine Relaxierung des Platzierungsproblems im VLSI-Design. Die Knoten entsprechen verbundenen Modulen, die platziert werden müssen, wobei die Länge der Verbindungen (Hyperkanten) minimiert werden soll. Knoten in F sind vorplatziert. Das eigentliche Problem besteht aber im überlappungsfreien platzieren. (5 Punkte)

Aufgabe 4: Es sei G ein gerichteter Graph mit Kantengewichten $c : E(G) \to \mathbb{R}_+$. Seien $E_1, E_2 \subseteq E(G)$ und $s, t \in V(G)$ mit $s \neq t$. Gegeben sei das LP

$$\begin{array}{lll} \min & \sum_{e \in E(G)} c(e) y_e & \\ s.d. & y_e \leq 0 & \forall e \in E_1, \\ & y_e \geq 0 & \forall e \in E_2, \\ & y_e \geq z_w - z_v & \forall e = (v, w) \in E(G), \\ & z_t - z_s = 1. & \end{array}$$

Zeigen Sie:

1. Es existiert genau dann eine Lösung, wenn jeder s-t-Weg in G eine Kante aus $E(G) \setminus E_1$ enthält. (2 Punkte)

2. Wenn das LP eine optimale Lösung $(\tilde{y}, \tilde{z})$ enthält, dann existiert eine Menge X mit $X \cap \{s, t\} = \{s\}$ und eine optimale Lösung (y, z), so dass $y_e = 1$ für alle $e \in \delta^+(X)$, $y_e = -1$ für alle $e \in \delta^-(X) \setminus E_2$ und $y_e = 0$ für alle übrigen Kanten. *Hinweis:* Betrachten Sie die Menge $\{v \in V(G) : \tilde{z}_v \leq \tilde{z}_s\}$ und nutzen Sie die Bedingungen des komplementären Schlupfes. (3 Punkte)

Abgabetermin ist Donnerstag, der 10.11.2011, vor der Vorlesung (12:15).