Wintersemester 2011/12 Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Juniorprofessor Dr. S. Held Universität Bonn
Dr. U. Brenner

Lineare und ganzzahlige Optimierung

Übungszettel 2

Aufgabe 1
Zeigen Sie, dass sich das Problem der Berechnung der größten Kugel, die in einem Polyeder enthalten ist, als lineares Programm formulieren lässt. (4 Punkte)

Aufgabe 2:
Es seien $X \subseteq \mathbb{K}^n$ und $y \in \operatorname{conv}(X)$. Hierbei ist $conv(Y) := \left\{\sum_{i=1}^k \lambda_i x_i : k \in \mathbb{N}, 0 \leq \lambda_i \leq 1, x_i \in Y \text{ für } 1 \leq i \leq k; \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1\right\}$ die konvexe Hülle einer Menge $Y \subseteq \mathbb{K}^n$. Zeigen Sie, dass es $x_1, \dots, x_{n+1} \in X$ gibt, so dass $y \in \operatorname{conv}(\{x_1, \dots, x_{n+1}\})$. (4 Punkte)

Aufgabe 3: (Drei äquivalente Charakterisierungen von Ecken)

Seien $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{K}^m$ und $P = P(A, b) = \{x \in \mathbb{K}^n \ : \ Ax \leq b\}$ das durch A und b definierte Polyeder. Ein Element $x \in P$ heißt **Extremalpunkt**, wenn es keine zwei von x verschiedenen Elemente $y, z \in P$ ($x \notin \{y, z\}$) gibt, so dass x Konvexkombination von y und z ist, d.h. es gibt kein $\lambda \in [0, 1]$ mit $x = \lambda y + (1-\lambda)z$. Sei $x^\star \in P$. Zeigen sie:

1. Wenn $x^\star$ Ecke von P ist, dann ist $x^\star$ ein Extremalpunkt von P. (2 Punkte)
2. Wenn es ein Teilsystem $A'x \leq b'$ von $Ax \leq b$ gibt, für das gilt $A'x^\star = b'$ mit $rank(A') = n$ gilt, so ist $x^\star$ eine Ecke von P. (3 Punkte)
3. Ist $x^\star$ ein Extremalpunkt von P, so gibt es ein Teilsystem $A'x \leq b'$ von $Ax \leq b$ für das $A'x^\star = b'$ und $rank(A') = n$ gilt. (3 Punkte)

Aufgabe 4: Wenden Sie die Fourier-Motzkin-Elimination an, um festzustellen, ob das folgende Ungleichungssystem eine Lösung besitzt:

$$
\begin{array}{ccccccc}
2x_1 & +6x_2 & +2x_3 & -x_4 & \leq & 1 \\
x_1 & -2x_2 & -3x_3 & +x_4 & \leq & 0 \\
-3x_1 & +6x_2 & -2x_3 & -3x_4 & \leq & 2 \\
-x_1 & -3x_2 & -3x_3 & -3x_4 & \leq & -3 \\
 & 3x_2 & +x_3 & +2x_4 & \leq & 4
\end{array}
$$

(4 Punkte)

Abgabetermin ist Donnerstag, der 27.10.2011, vor der Vorlesung (12:15).