Wintersemester 2011/12
Juniorprofessor Dr. S. Held
Dr. U. Brenner

Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Universität Bonn

Lineare und ganzzahlige Optimierung

Übungszettel 1

Aufgabe 1:
Eine Papiermühle stellt Papierrollen mit 3 m Breite her. Die Kunden bestellen allerdings Rollen kleinerer Breite, und die Mühle muss die bestellten Rollen aus den 3 m breiten Rollen herausschneiden. Zum Beispiel kann eine 3 m breite Rolle in zwei 93 Zentimeter breite Rollen und eine 108 m breite Rolle geschnitten werden, wobei ein Rest von 6 cm bleiben würde.
Die aktuell zu bearbeitende Gesamtbestellung bestehe aus:

- 90 Rollen der Breite 130 cm,
- 610 Rollen der Breite 108 cm,
- 395 Rollen der Breite 42 cm und
- 211 Rollen der Breite 93 cm.

Stellen Sie ein lineares Program auf, welches die Anzahl der zu produzierenden 3 m breiten Rollen minimiert und ein korrektes Zuschneiden der bestellten Rollen gewährleistet. (4 Punkte)

Aufgabe 2:
Seien $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & -2 & 0 & -10 \end{pmatrix}^\intercal$ und $b = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 & 4 & 2 & 5 & -11 \end{pmatrix}^\intercal$. Lösen Sie das LP $\max\{c^\intercal x \;:\; Ax \leq b\}$ grafisch und geben Sie jeweils die Menge der optimalen Lösungen für folgende Zielfunktionsvektoren c an:

1. $c = \begin{pmatrix} 0 & -3 \end{pmatrix}^\intercal$
2. $c = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}^\intercal$
3. $c = \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix}^\intercal$

Sei $P := P(A, b) = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ Ax \le b\}$. Wie viele null-, ein-, und zweidimensionale Seiten hat P. Geben Sie für jede der drei Dimensionen eine Seite als Beispiel an, und zwar in der Form $F = \{x \in P \ : \ c^\intercal x = \delta\}$ und in der Form $F = \{x \in P \ : \ A'x = b'\}$. Hierbei ist c ein Zeilenvektor, δ eine reelle Zahl und $A'x \le b'$ ein Teilsystem von $Ax \le b$. (4 Punkte)

Aufgabe 3: Geben Sie notwendige und hinreichende Bedingungen für die Zahlen $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}$ an, so dass das LP $\max\{x + y \ : \ \alpha x + \beta y \le \gamma; \ x, y \ge 0\}$

- eine optimale Lösung besitzt;
- keine zulässige Lösung besitzt;
- unbeschränkt ist.

(4 Punkte)

Aufgabe 4: Ein Polyeder ist genau dann volldimensional, wenn es einen Punkt in seinem Inneren gibt.

(8 Punkte)

Abgabetermin ist Donnerstag, der 20.10.2011, vor der Vorlesung (12:15).