Wintersemester 2010/11 | Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Juniorprofessor Dr. S. Held | Universität Bonn
Dr. U. Brenner

Lineare und ganzzahlige Optimierung

Übungszettel 12

Aufgabe 1: Gegeben sei ein Digraph $G = (V, E)$ mit $|V| = n$ und $|E| = m$. Der Lösungsraum des gerichteten Traveling-Salesman-Problems wird durch folgende Nebenbedingungen beschrieben:

$$\begin{aligned} \sum_{v:(v,w)\in E} x_{(v,w)} &= 1, \quad \forall\, w \in V \\ \sum_{w:(v,w)\in E} x_{(v,w)} &= 1, \quad \forall\, v \in V \\ \sum_{(v,w)\in E\,:\,v\in S, w\notin S} x_{(v,w)} &\geq 1, \quad \forall\, S \subset V, S \neq \emptyset, V \\ x_{(v,w)} &\in \{0,1\} \quad \forall\, (v,w) \in E \end{aligned}$$

Es sei $\mathcal{F}$ die Menge der zulässigen Lösungen.

1. Sei $v_0 \in V$ beliebig aber fest. Betrachten Sie nun die Menge $\mathcal{F}'$ aller x-Vektoren, für die es Werte $y_v \in \mathbb{R}$ (für $v \in V(G)$) gibt, so dass durch folgenden (polynomiell vielen) Nebenbedingungen erfüllt sind:

$$\begin{aligned} \sum_{v:(v,w)\in E} x_{(v,w)} &= 1, \quad \forall\, w \in V \\ \sum_{w:(v,w)\in E} x_{(v,w)} &= 1, \quad \forall\, v \in V \\ y_v - y_w + n x_{(v,w)} &\leq n-1, \quad \forall\, (v,w) \in E, v, w \neq v_0 \\ x_{(v,w)} &\in \{0,1\}, \quad \forall\, (v,w) \in E \end{aligned}$$

   Zeigen Sie, dass $\mathcal{F}' = \mathcal{F}$ gilt. (4 Punkte)

2. Es seien $LP_{\mathcal{F}}$ und $LP_{\mathcal{F}'}$ die sich durch lineare Relaxierung der jeweiligen Ungleichungssysteme ergebenen Polyeder. Zeigen Sie, dass $LP_{\mathcal{F}} \subseteq LP_{\mathcal{F}'}$ gilt, und geben Sie ein Beispiel mit $LP_{\mathcal{F}} \neq LP_{\mathcal{F}'}$ an. (4 Punkte)

3. Zeigen oder widerlegen Sie: $LP_{\mathcal{F}} = \mathrm{conv}(\mathcal{F})$. (2 Punkte)

Aufgabe 2: Es sei A eine ganzzahlige $m \times n$-Matrix, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$ und z eine optimale Lösung von $\max\{c^\intercal x \,:\, Ax \leq b, x \in \mathbb{Z}^n\}$. Beweisen Sie, dass es eine Lösung y von $\max\{c^\intercal x \,:\, Ax \leq b\}$ mit $||y - z||_\infty \leq n\Xi(A)$ gibt. (5 Punkte)

Aufgabe 3: Beweisen Sie, dass jede unimodulare Matrix aus einer Einheitsmatrix durch eine unimodulare Transformation hervorgeht. (5 Punkte)

Abgabetermin der Aufgabe ist Donnerstag, der 20.01.2010, vor der Vorlesung (12:15).

Hinweis zur nächsten Mentorenveranstaltung:
Die Mentorengruppe des Forschungsinstituts für Diskrete Mathematik trifft sich am Donnerstag, den 13. Januar um 18 Uhr im Konferenzraum des Arithmeums. Maxim Janzen trägt über „Datenstrukturen für Graphen“ vor. Dabei werden Programmierdetails in C++ sowie Vor- und Nachteile besprochen. Im Anschluss bietet sich die Möglichkeit, mit dem eigenen Laptop das Gelernte praktisch anzuwenden. Alle interessierten Studenten sind herzlich eingeladen.