Wintersemester 2010/11 Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Juniorprofessor Dr. S. Held Universität Bonn
Dr. U. Brenner

Lineare und ganzzahlige Optimierung

Übungszettel 10

Aufgabe 1: Sei $P = \{x \in \mathbb{R}^{k+l} : Ax \leq b\}$ ein rationales Polyeder. Zeigen Sie, dass die **gemischt-ganzzahlige Hülle** $\mathrm{conv}(P \cap (\mathbb{Z}^k \times \mathbb{R}^l))$ von P ein Polyeder ist.
(5 Punkte)

Aufgabe 2: Betrachten Sie eine auf einem abgeschlossenen Interval $[a_1, a_k]$ durch ihre Stützstellen $(a_i, f(a_i))$ $(i = 1, \ldots, k,\ a_1 < a_2 < \cdots < a_k)$ definierte stückweise lineare Funktion f. Formulieren Sie das Problem $\min\{f(x) : x \in [a_1, a_k]\}$ als gemischt ganzzahliges lineares Programm, d.h. als ein lineares Programm, in dem die Ganzzahligkeit für eine Teilmenge der Variablen gefordert wird. (5 Punkte)

Aufgabe 3: Eine Ladenkette will m Filialen über Zwischenlager bedienen. Für diese stehen n potentielle Lokationen zur Verfügung. Die Eröffnung eines Zwischenlagers führt zu Fixkosten von $c_j > 0$ $(j \in \{1, \ldots, n\})$, während die Bedienung einer Filiale $i \in \{1, \ldots, m\}$ über ein Zwischenlager $j \in \{1, \ldots, n\}$ zu Transportkosten von $d_{ij} > 0$ führt. Formulieren Sie das Problem, eine Menge von Zwischenlagern zu öffnen und jede Filiale einem offenen Zwischenlager zuzuordnen, so das die Summe aus Eröffnungskosten und Transportkosten minimiert wird, als IP. (5 Punkte)

Abgabe bis spätestens Donnerstag, den 23.12.2010, (12:15).

Programmieraufgabe 3: Implementieren Sie den Branch-&-Bound-Algorithmus 10 für das Maximum-Weight-Stable-Set-Problem. Als Ergänzung zum Maximum-Stable-Set-Problem sind jetzt zusätzlich Knotengewichte $w : V(G) \to \mathbb{N}$ gegeben.
Das Problem ist dann durch folgendes IP gegeben:

$$\max \sum_{v \in V(G)} w(v) x_v \tag{1}$$

$$s.d. \quad x_v + x_w \leq 1 \qquad \forall \{v, w\} \in E(G) \tag{2}$$

$$x_v \in \{0, 1\} \qquad \forall v \in V(G) \tag{3}$$

Als LP-Solver sollten Sie einen der für akademische Zwecke frei verfügbaren Programme **QSopt** (und hiermit wird Ihr Code getestet), CPLEX oder Gurobi verwenden. Die externen LP-Löser müssen durch das auf den Webseiten vorhandene Interface in `lp.h` angesteuert werden. Dazu stehen jeweils Implementierungen zur Verfügung. Um die softwaretechnische Hürde zu reduzieren, finden Sie auf den Webseiten zur Übung ein vorgefertigtes Programm, das

1. eine Instanz einliest,
2. die LP-Relaxierung des obigen IPs über das Interface in lp.h aufbaut,
3. löst und den Lösungsvektor x ausgibt

(siehe http://www.or.uni-bonn.de/ held/lpip/1011/mss.zip). Die ZIP-Datei enthält auch Testinstanzen. **Bitte lesen Sie auch die beigefügte README Datei für weitere Informationen!** Das Programm ist unter Linux oder Windows/Cygwin kompilierbar. Dazu muss im entpackten Verzeichnis 'mss' in einem Terminal 'make' ausgeführt werden.

Es ist zu beachten, dass die Matrix A in modernen LP-Lösern immer dünn gespeichert wird, da i.d.R. die meisten Koeffizienten gleich Null sind. Daher werden, wie in lp.h kommentiert, neue Nebenbedingungen/Zeilen immer über die Nicht-Null-Koeffizienten definiert. Entsprechende Funktionen sind in lp.h kommentiert und die Anwendung in mss.c ersichtlich.

Wie Sie auf dem letzten Übungszettel sehen konnten, hat obige LP-Relaxierung eine große Ganzzahligkeitslücke, was bei B&B problematisch ist. Daher sollten Sie zunächst im Root-LP (LP_0) diese Lücke durch das **Hinzufügen von Clickenrestriktionen** verschärfen (siehe Aufgabe 4 auf Zettel 9). Hierzu können Sie einen einfachen Greedy-Algorithmus implementieren, der, startend mit $C = \{v\}$ für ein $v \in V(G)$, solange wie möglich Knoten $w \in V(G) \setminus C, C \subseteq \delta(w)$, mit einem großen Wert x_w zu C hinzufügt.

Diesen sollten Sie zu Beginn iterativ mit unterschiedlichen $v \in V$ starten lassen, bis alle Knoten Teil einer solchen (inklusions-) maximalen Clique sind. Anschließend brauchen Sie keine Cliquenrestriktionen mehr hinzufügen, auch wenn das inkrementelle Hinzufügen weiterer verletzter Restriktionen ggf. von Vorteil wäre.

Der Algorithmus sollte die Werte des Root-LPs ohne Cliquenrestriktionen, des Root-LPs mit Cliquenrestriktionen und das maximale Gewicht einer stabilen Menge S sowie die Indizes der Knoten in S ausgeben. (15 Punkte)

Abgabetermin der Programmieraufgabe ist Donnerstag, der 20.01.2010, vor der Vorlesung (12:15).