Wintersemester 2010/11 Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Juniorprofessor Dr. S. Held Universität Bonn
Dr. U. Brenner

Lineare und ganzzahlige Optimierung

Übungszettel 9

Aufgabe 1: Wir definieren

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ s & -1 \end{pmatrix} \text{ und } b := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Finden Sie für $s = -1$ und $s = -2$ mit $x_0 = 0$ und $R = 2$ und hinreichend großem N jeweils eine zulässige Lösung in $P = \{x \in \mathbb{R}^2 : Ax \leq b\}$ mit der Ellipsoidmethode. (5 Punkte)

Aufgabe 2:
Zeigen Sie, dass der in Satz 7.20 angegebene Algorithmus das Problem LINEARE OPTIMIERUNG für eine Instanz $\max\{c^\intercal x : Ax \leq b\}$, mit $A \in \mathbb{Q}^{m \times n}, b \in \mathbb{Q}^m, c \in \mathbb{Q}^n$, in $O((n+m)^9(\text{size}(A) + \text{size}(b) + \text{size}(c))^2)$-Zeit löst. (5 Punkte)

Aufgabe 3: Betrachten Sie das folgende ILP (ganzzahlig lineares Programm)

$$\begin{array}{ll} \max -\sqrt{2}x + y & \\ -\sqrt{2}x + y & \leq 0 \\ x & \geq 1 \\ y & \geq 0 \\ x, y & \in \mathbb{Z} \end{array}$$

Zeigen Sie:

1. Das ILP besitzt zulässige Lösungen. (1 Punkt)
2. Der Zielfunktionswert ist nach oben durch 0 beschränkt. (1 Punkt)
3. Es gibt keine Optimallösung. (2 Punkte)
4. Bezeichnet S die Lösungsmenge des ILPs, so ist $\text{conv}(S)$ kein Polyeder. (1 Punkt)

Aufgabe 4:
Das MAXIMUM-STABLE-SET-PROBLEM ist wie folgt definiert. Zu einem gegebenen Graphen G ist eine Knotenmenge $S \subseteq V(G)$ maximaler Kardinalität $|S|$ gesucht, so dass $\{v, w\} \notin E(G)$ für alle $v, w \in S$. Eine Knotenmenge S mit $E(G[S]) = \emptyset$ wird auch als *stabile Menge* bezeichnet. Dieses Problem wird durch folgendes ILP modelliert:

$$\max \sum_{v \in V(G)} x_v \tag{1}$$

$$s.d. \quad x_v + x_w \leq 1 \qquad \forall \{v, w\} \in E(G) \tag{2}$$

$$x_v \in \{0, 1\} \qquad \forall v \in V(G) \tag{3}$$

Zeigen Sie,

1. dass es eine Klasse von Instanzen gibt, so dass die Ganzzahligkeitslücke, das ist der Quotient aus dem Optimalwert der linearen Relaxierung, in welcher die Ganzzahligkeitsbedingungen (3) durch

$$0 \leq x_v \leq 1 \quad \forall v \in V(G)$$

ersetzt werden, und dem Optimalwert des ILPs (1)–(3) die Größenordnung $\Omega(|V(G)|)$ hat.

2. dass die Bedingungen (2) ergänzt werden können durch

$$\sum_{v \in V(C)} x_v \leq 1 \quad \text{für eine Clique } C \subseteq G,$$

wobei eine Clique ein vollständiger Subgraph von G ist. Geben Sie zudem ein Beispiel an, in dem der Optimalwert der linearen Relaxierung nach Hinzufügen einer solchen Ungleichung echt verringert wird.

(5 Punkte)

Abgabetermin ist Donnerstag, der 16.12.2010, vor der Vorlesung (12:15).

Mentorenveranstaltung:
Die Mentorengruppe des Forschungsinstituts für Diskrete Mathematik trifft sich am Donnerstag, den **16. Dezember um 18 Uhr im Konferenzraum des Arithmeums**. Pascal Welke stellt seine Bachelorarbeit „Optimale Landmarkmengen in Graphen“ vor. Alle interessierten Studenten sind herzlich eingeladen.