Wintersemester 2010/11
Juniorprofessor Dr. S. Held
Dr. U. Brenner

Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Universität Bonn

Lineare und ganzzahlige Optimierung

Übungszettel 8

Aufgabe 1
Bestimmen Sie $p, q \in \mathbb{N}$ mit $q < 100$, so dass $\left|\pi - \frac{p}{q}\right|$ minimal ist und begründen Sie, warum Ihre Wahl diese Eigenschaft erfüllt. (5 Punkte)

Aufgabe 2
Sei $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge der Fibonaccizahlen, d.h. $F_0 = 0, F_1 = 1$ und $F_n = F_{n-1}+F_{n-2}$ für $n \geq 2$. Zeigen Sie:

1. $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$.
2. In jeder Iteration $i \geq 0$ von Algorithmus 6 zur Kettenbrucherweiterung, bzw. -zerlegung, gilt $h_i \geq F_{i+1}$.
3. Der Kettenbruchalgorithmus mit Input $\frac{p}{q}$ terminiert nach $O(\log q)$ Iterationen.

(2+1+2 Punkte)

Aufgabe 3
Es seien $r \in \mathbb{Q}_+$ und $p \in \mathbb{N}$. Die Wurzel $\sqrt{r}$ soll bis auf die p-te Nachkommastelle genau berechnet werden. Zeigen Sie, dass diese Aufgabe in $O(\log p + \mathrm{size}(r))$ elementaren Rechenschritten (Additionen, Subtraktionen, Multiplikationen und Divisionen) erledigt werden kann. (Hinweis: Newtonverfahren) (5 Punkte)

Aufgabe 4
Sei $E(A, x) \subset \mathbb{R}^n$ ein Ellipsoid, $a \in \mathbb{R}^n$ und $E' = \{z \in E(A, x) : a^\intercal z \geq a^\intercal x\}$. Zeigen Sie, dass das Ellipsoid $E(A', x')$ mit $A' = \frac{n^2}{n^2-1}\left(A - \frac{2}{n+1}bb^\intercal\right), x' = x + \frac{1}{n+1}b$ und $b = \frac{1}{\sqrt{a^\intercal Aa}}Aa$ dass Halbellipsoid E' enthält. (5 Punkte)

Abgabetermin ist Donnerstag, der 9.12.2010, vor der Vorlesung (12:15).

Wiederholter Hinweis auf die heutige **Mentorenveranstaltung:**
Die Mentorengruppe des Forschungsinstituts für Diskrete Mathematik trifft sich am **Donnerstag, den 2. Dezember um 18 Uhr im Konferenzraum des Arithmeums**. Philipp Ochsendorf stellt seine Bachelorarbeit „Effiziente Implementierung eines Multisection-Algorithmus“ vor. Alle interessierten Studenten sind herzlich eingeladen.