Wintersemester 2010/11
Juniorprofessor Dr. S. Held
Dr. U. Brenner

Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Universität Bonn

Lineare und ganzzahlige Optimierung

Übungszettel 7

Aufgabe 1
Beim Netzwerksimplexalgorithmus muss in jeder Iteration der durch eine Kante $e \notin T$ definierte Fundamentalkreis C bestimmt werden. Wir nehmen an, dass jeder Knoten einen Zeiger auf seinen Vorgänger auf dem Weg zur Wurzel r über Kanten aus T bereithält. Die Bestimmung von C geht dann leicht in $O(|V(G)|)$ Zeit. Allerdings gilt häufig $|V(G)| \gg |V(C)|$. Zeigen Sie, wie der Gipfel von C

1. durch das Ablaufen von höchstens $2|V(C)|$ Kanten unter Verwendung der Vorgängerzeiger und eines weiteren Speicherbits pro Knoten gefunden werden kann; (3 Punkte)

2. durch das Ablaufen von höchstens $|V(C)|$ Kanten gefunden werden kann, wenn an jedem Knoten v die Baumtiefe (definiert als die Anzahl der Kanten auf dem r-v-Weg durch T) bekannt ist. (2 Punkte)

(Sobald der Gipfel bekannt ist, können die Kanten von C durch Ablaufen von $|V(C)|$ Knoten und Kanten aufgesammelt werden.)

Aufgabe 2
Gegeben sei ein Minimum-Cost-Flow-Problem (G, u, b, c) mit $u \in \mathbb{N}^{E(G)}$ und $b \in \mathbb{Z}^{V(G)}$. Wir halten eine Ordnung $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ der Knotenmenge fest und definieren einen Perturbationsvektor $\epsilon \in \mathbb{K}^{V(G)}$ durch $\epsilon(v_i) = \frac{1}{n}$ für alle $i = 2, 3, \ldots, n$ und $\epsilon(v_1) = -\frac{n-1}{n}$ und betrachten das perturbierte Problem $(G, u, b + \epsilon, c)$.

1. Es sei (r, T) ein spannender Baum mit Kantenmenge T und Wurzel $r = v_1$. Es bezeichne $D(v)$ die Menge der Knoten $v' \in V(G)$, deren v'-r-Weg durch den Baum den Knoten v enthält. Insbesondere gilt $v \in D(v)$. Zeigen Sie, dass die Perturbierung $b + \epsilon$ im Vergleich zur Originalbalance b den zugehörigen Fluss auf einer abwärtsgerichteten Baumkante (v, w) um $|D(w)|/n$ verringert und auf einer aufwärtsgerichteten Baumkante (v, w) um $|D(v)|/n$ erhöht.

   Schließen Sie desweiteren, dass in einer zulässigen Baumstruktur für $(G, u, b + \epsilon, c)$ jeder zugehörige Flusswert einer Baumkante ungleich Null und ein Vielfaches von $\frac{1}{n}$ ist. (4 Punkte)

2. Benutzen Sie den 1. Teil, um zu zeigen, dass der Netzwerksimplexalgorithmus das perturbierte Problem unabhängig von der Wahl der eingehenden Kante in pseudopolynomieller Zeit löst. (2 Punkte)

3. Zeigen Sie, dass (r, T, L, U) genau dann eine stark zulässige Baumstruktur für (G, u, b, c) ist, wenn es eine zulässige Baumstruktur von $(G, u, b + \epsilon, c)$ ist. Folgern Sie hieraus, dass der Netzwerksimplexalgorithmus, wenn er stark zulässige Baumstrukturen generiert, unabhängig von der Pivotregel zur Wahl der eingehenden Kante eine pseudopolynomielle Laufzeit hat. (3 Punkte)

Aufgabe 3
Zeigen Sie:

1. Für Matrizen $A \in \mathbb{Q}^{m \times n}$ und $B \in \mathbb{Q}^{n \times p}$ gilt $\mathrm{size}(AB) \leq 2\,(p\,\mathrm{size}(A) + m\,\mathrm{size}(B))$. (2 Punkte)

2. Ist $A \in \mathbb{Q}^{n \times n}$ invertierbar, so gilt $\mathrm{size}(A^{-1}) \leq 4n^2 \mathrm{size}(A)$. (4 Punkte)

Abgabetermin ist Donnerstag, der 2.12.2010, vor der Vorlesung (12:15).

Mentorenveranstaltung:
Die Mentorengruppe des Forschungsinstituts für Diskrete Mathematik trifft sich am **Donnerstag, den 2. Dezember um 18 Uhr im Konferenzraum des Arithmeums**. Philipp Ochsendorf stellt seine Bachelorarbeit „Effiziente Implementierung eines Multisection-Algorithmus“ vor. Alle interessierten Studenten sind herzlich eingeladen.