Wintersemester 2010/11 Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Juniorprofessor Dr. S. Held Universität Bonn
Dr. U. Brenner

Lineare und ganzzahlige Optimierung

Übungszettel 6

Aufgabe 1
Betrachten Sie folgendes LP: $\max\{c^\intercal x : Ax = b, l \le x \le u\}$, wobei A vollen Zeilenrang hat und $l, u \in \mathbb{K}^n, l \le u$, untere und obere Schranken für alle Variablen sind. Gegeben sei eine zulässige Basis B von A, d.h. A_B ist regulär und $l_B \le x_B := A_B^{-1}b \le u_B$, sowie eine Partition $N = N_l \dot\cup N_u$ der Nichtbasisvariablen. Mit dieser ergänzen wir x_B durch: $x_j := l_j$ ($j \in N_l$) und $x_j := u_j$ ($j \in N_u$) zu einer zulässigen Lösung. Zeigen Sie, dass diese Lösung optimal ist, wenn

1. $c_j - c_B^\intercal A_B^{-1} A_{\cdot j} \le 0$ für alle $j \in N_l$ **und** 2. $c_j - c_B^\intercal A_B^{-1} A_{\cdot j} \ge 0$ für alle $j \in N_u$.

Folgern Sie hieraus Proposition 6.8 aus der Vorlesung. (5 Punkte)

Aufgabe 2
Betrachten Sie folgendes LP mit einer einzelnen Restriktionsgleichung

$$\begin{array}{ll} \min & \sum_{i=1}^n c_i x_i \\ s.d. & \sum_{i=1}^n a_i x_i = b \\ & 1 \ge x_i \ge 0 \quad i = 1, \dots, n \end{array}$$

1. Geben Sie einen einfachen Lösbarkeitstest für das Problem an.
2. Geben Sie einen einfachen Algorithmus mit Laufzeitschranke $O(n \log n)$ an, um die Optimallösung zu bestimmen.

(5 Punkte)

Aufgabe 3
Betrachten Sie ein LP in Standardform $\max\{c^\intercal x : Ax = b, x \ge 0\}$ und eine optimale Basis B mit optimaler Basislösung $x^\star$ und reduzierten Kosten $z_N \le 0$ (wie z.B. bei Terminierung des Simplexalgorithmus im Pricing-Schritt). Es sei $I \subseteq N$ die Menge der Nichtbasisvariablen, mit reduzierten Kosten $z_j = 0$ ($j \in I$). Zeigen Sie:

1. $I = \emptyset \Rightarrow x^\star$ ist die einzige Optimallösung.

2. $x^\star$ ist genau dann die einzige Optimallösung, wenn das folgende LP den Optimalwert 0 hat:

$$\begin{array}{ll} \max & \sum_{i \in I} x_i \\ s.d. & Ax = b, \\ & x_i = 0, \quad i \in N \setminus I, \\ & x_i \geq 0, \quad i \in B \cup I. \end{array}$$

(5 Punkte)

Abgabetermin der theoretischen Aufgaben ist Donnerstag, 25.11.2010, vor der Vorlesung (12:15).

Programmieraufgabe 1
Implementieren Sie den Simplexalgorithmus. Der Algorithmus bekommt keine Startlösung, sondern soll selbst eine Startbasis finden.
Die Aufgabe besteht darin, entweder Unzulässigkeit oder Unbeschränktheit festzustellen und einen Vektor auszugeben, der dies beweist, oder eine optimale Lösung mitsamt Zielfunktionswert auszugeben, nebst der dualen Lösung. So kann die Korrektheit des Outputs in jedem Fall leicht geprüft werden. Es ist Ihnen frei gestellt, den Simplexalgorithmus wie in Algorithmus 3 (Bonuspunkte) beschrieben oder mit dem Simplextableau und den Formeln aus Lemma 5.24 zu implementieren.
Wählen Sie eine Indexstrategie Ihrer Wahl und achten Sie auf eine effiziente Implementierung. Im Programmtext sollen geeignete Kommentare stehen.
Als Input erwartet das Programm, genau wie bei Programmieraufgabe 1 auf Zettel 3, eine Textdatei, die eine Lineare-Programmier-Instanz $\max\{c^\intercal x : x \in P\}$ mit $P = \{x \in \mathbb{K}^n : Ax \leq b\}$ beschreibt, wobei A eine $m \times n$ Matrix ist. In der ersten Zeile stehen dabei m und n, in der zweiten Zeile die n Einträge von c und in der dritten Zeile die m Einträge von $b^\intercal$. Die nächsten m Zeilen entsprechen den Zeilen von A. Das Programm sollte mit *Programmname Instanzname* aufgerufen werden können. Sie können die Beispielinstanzen von Programmieraufgabe 1 verwenden
Das Programm soll in C/C++, mit den GNU-Compilern gcc bzw. g++ kompilierbar, erstellt werden. (16 Punkte)
Bei Implementierung von Algorithmus 3 (d.h. ohne Tableau) gibt es (4 Bonuspunkte)

Abgabe der Programmieraufgabe: Mailen Sie Ihre Lösung (kompilierbarer Quellcode mit Kommentaren) bis zum **15.12.2010, 12:15** an **lingo@or.uni-bonn.de**.