Lineare und ganzzahlige Optimierung

Übungszettel 5

Aufgabe 1:
Lösen Sie das folgende LP schriftlich mit dem Simplexalgorithmus (Algorithmus 3) unter Verwendung von Blands Regel. Schreiben Sie für jede Iteration detailliert die Schritte BTRAN, PRICING, FTRAN, RATIO-Test und Update auf. Fügen Sie zunächst Schlupfvariablen ein und verwenden Sie diese als Startbasis.

$$\begin{array}{rrl} \max & -x_1 + 2x_2 & \\ s.d. & x_1 - x_2 & \leq 2 \\ & -x_1 + x_2 & \leq 1 \\ & x_1, x_2 & \geq 0 \end{array}$$

4 Punkte

Aufgabe 2:
Lösen Sie das folgende LP mit der Tableau-Version des Simplexalgorithmus unter Verwendung von Dantzigs Pivotregel. Bei Nichteindeutigkeit verwenden Sie die linke Spalte bzw. obere Zeile. Schreiben Sie für jede Iteration das Simplextableau auf und markieren Sie jeweils ein- und austretende Variablen. Fügen Sie zunächst Schlupfvariablen ein und verwenden Sie diese als Startbasis.

$$\begin{array}{rrcrl} \max & x_1 & + & x_2 & \\ s.d. & x_1 & & & \leq 4 \\ & & & x_2 & \leq 6 \\ & \frac{1}{4}x_1 & - & x_2 & \leq 0 \\ & \frac{1}{2}x_1 & + & x_2 & \leq 7 \\ & x_1 & , & x_2 & \geq 0 \end{array} \tag{1}$$

4 Punkte

Aufgabe 3:
Es seien $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph mit Kantenkapazitäten $u : E \to \mathbb{K}_+$ und $s, t \in V$ zwei ausgewählte Knoten. Es sei ferner

$$\mathcal{P} := \{P \subseteq E \,:\, P \text{ ist die Kantenmenge eines s-t-Pfad}\}.$$

Betrachten Sie folgendes LP

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{P \in \mathcal{P}} y_P & & \\ s.d. \quad & \sum_{P \in \mathcal{P}: e \in P} y_P \leq u_e & \forall e \in E & \\ & y_p \geq 0 & \forall P \in \mathcal{P}. & \end{aligned} \tag{P}$$

1. Schreiben Sie das duale (D) zu (P) auf und geben Sie eine graphentheoretische Interpretation von (D) und (P).

2. Geben Sie eine Klasse von Graphen an, für die Anzahl der Pfade $|\mathcal{P}|$ nicht polynomiell durch $|V| + |E|$ beschränkt werden kann.

3. Formulieren Sie in ein äquivalentes Programm, in dem die Anzahl der Variablen und Nebenbedingungen linear durch $|V| + |E|$ beschränkt ist.

(5 Punkte)

Aufgabe 4:
Im Folgenden sei, so nicht anders geschrieben, immer ein LP in Standardform $\max\{c^\intercal x : Ax = b, x \geq 0\}$ mit vollem Zeilenrang und $P^=(A, b) = \emptyset$ gegeben. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

1. Eine Variable, die beim Simplexalgorithmus gerade in die Basis eingetreten ist, kann die Basis beim nächsten Schritt wieder verlassen.

2. Eine Variable, die beim Simplexalgorithmus gerade die Basis verlassen hat, kann im nächsten Schritt wieder in die Basis eintreten.

3. Ist $x^\star$ eine eindeutige optimale Basislösung und $\tilde{x}$ eine zweitbeste Basislösung mit echt kleineren Kosten, so erhält man $x^\star$ aus $\tilde{x}$ durch Austausch einer Basisvariablen.

4. Falls keine Basislösung degeneriert ist und das LP nach oben beschränkt ist, so ist die Optimallösung eindeutig.

5. Ist $A = A^\intercal$, so ist jede zulässige Lösung des LPs $\max\{c^\intercal x : Ax = c\}$ optimal.

6. Ist eine Variable x_j ohne Vorzeichenbeschränkung durch $x_j^+ - x_j^-$ $(x_j^+, x_j^- \geq 0)$ ersetzt worden, so ist im Simplexverfahren in jedem Schritt höchstens eine der Variablen x_j^+, x^- ungleich Null.

7 Punkte

Abgabetermin ist Donnerstag, 18.11.2010, vor der Vorlesung (12:15).