Wintersemester 2010/11 — Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Juniorprofessor Dr. S. Held — Universität Bonn
Dr. U. Brenner

Lineare und ganzzahlige Optimierung

Übungszettel 4

Aufgabe 1: Zeigen Sie: Sind P und Q Polyeder, so ist der Abschluss der konvexen Hülle dieser Polyeder $\overline{\mathrm{conv}(P \cup Q)}$ wieder ein Polyeder. Geben Sie ein Beispiel in dem $\mathrm{conv}(P \cup Q)$ kein Polyeder ist. (5 Punkte)

Aufgabe 2: Ist der Punkt $x^* = (0, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}, 0)^T$ eine Optimallösung des folgenden LPs?

$$\begin{array}{rrcrcrcrcrcl}
\max & 7x_1 & + & 6x_2 & + & 5x_3 & - & 2x_4 & + & 3x_5 & & \\
\text{s.t.} & x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & - & 2x_4 & + & 2x_5 & \leq & 4 \\
& 4x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & + & x_5 & \leq & 3 \\
& 2x_1 & + & 4x_2 & + & 4x_3 & - & 2x_4 & + & 5x_5 & \leq & 5 \\
& 3x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & - & 2x_5 & \leq & 1 \\
& & & & & x_1, x_2, & & x_3, x_4, & & x_5 & \geq & 0
\end{array}$$

Beantworten Sie die Frage mit Hilfe der Bedingungen des komplementären Schlupfes. (5 Punkte)

Aufgabe 3: Im Job-Assignment-Problem sind n Jobs mit Arbeitsstundenbedarf $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}$ und m ArbeiterInnen gegeben. Die Mengen $S_i \subseteq \{1, \dots, m\}$ gibt die ArbeiterInnen an, die den Job $i \in \{1, \dots, n\}$ erledigen können. An jedem Job $i \in \{1, \dots, n\}$ können gleichzeitig beliebig viele ArbeiterInnen aus S_i arbeiten. Eine Person kann an verschiedenen Jobs arbeiten, jedoch nur nacheinander.

1. Stellen Sie ein LP auf, dass die Gesamtzeit zur Erledigung aller Jobs minimiert.
2. Bestimmen Sie das duale LP.
3. Geben Sie für $n = 2$ und $t_1, t_2 > 0$ einen direkten Algorithmus an, der eine optimale primale und eine optimale duale Lösung findet, und begründen Sie seine Korrektheit.

(5 Punkte)

Aufgabe 4: Sei G ein gerichteter Graph mit Kantengewichten $c : E(G) \to \mathbb{R}_+$. Seien $E_1, E_2 \subseteq E(G)$ und $s, t \in V(G)$ mit $s \neq t$. Gegeben sei das LP

$$\begin{array}{lll} \min & \sum\limits_{e \in E(G)} c(e) y_e & \\ s.d. & y_e \leq 0 & \forall e \in E_1, \\ & y_e \geq 0 & \forall e \in E_2, \\ & y_e \geq z_w - z_v & \forall e = (v, w) \in E(G), \\ & z_t - z_s = 1. & \end{array}$$

Zeigen Sie:

1. Es existiert genau dann eine Lösung, wenn jeder s-t-Weg in G eine Kante aus $E(G) \setminus E_1$ enthält.

2. Wenn das LP eine optimale Lösung $(\tilde{y}, \tilde{z})$ enthält, dann existiert eine Menge X mit $X \cap \{s, t\} = \{s\}$ und eine optimale Lösung (y, z), so dass $y_e = 1$ für alle $e \in \delta^+(X)$, $y_e = -1$ für alle $e \in \delta^-(X) \setminus E_2$ und $y_e = 0$ für alle übrigen Kanten. *Hinweis:* Betrachten Sie die Menge $\{v \in V(G) : \tilde{z}_v \leq \tilde{z}_s\}$ und nutzen Sie die Bedingungen des komplementären Schlupfes.

(5 Punkte)

Abgabetermin ist Donnerstag, 11.11.2010, vor der Vorlesung (12:15).