

Einführung in die Diskrete Mathematik

12. Übung

1. Betrachten Sie Varianten von SATISFIABILITY eingeschränkt auf Instanzen, in denen jede Variable in höchstens drei Klauseln vorkommt und jede Klausel

- (a) genau drei verschiedene Literale enthält.
- (b) höchstens drei verschiedene Literale enthält.

Man entscheide für beide Varianten, ob sie NP -vollständig sind oder ob es einen polynomiellen Algorithmus gibt. Begründen Sie Ihre Antworten. (3+3 Punkte)

2. Man betrachte folgendes Problem: Zu einer gegebenen SATISFIABILITY-Instanz soll entschieden werden, ob sie von der Mehrzahl aller Wahrheitsbelegungen der verwendeten Variablen erfüllt wird. Zeigen Sie, dass $P = NP$ gilt, wenn es für dieses Problem einen Algorithmus mit polynomieller Laufzeit gibt. (4 Punkte)

3. Das Clique-Problem (also das Problem, zu entscheiden, ob ein gegebener Graph G mit n Knoten eine Clique der Größe k enthält) ist leicht in polynomieller Zeit lösbar, wenn k konstant ist (warum?). Zeigen Sie, dass es aber NP -vollständig bleibt, wenn man es auf k mit $k = O(n^{\frac{1}{t}})$ für ein konstantes t einschränkt. (5 Punkte)

4. Betrachten Sie folgendes Problem: Finde zu einem gegebenen Graphen G eine möglichst kleine Menge $X \subseteq V(G)$ mit $X \cup \Gamma(X) = V(G)$. Hier ist $\Gamma(X)$ wieder die Menge der Nachbarn von X . Man zeige, dass es für dieses Problem genau dann einen polynomiellen Algorithmus gibt, wenn $P = NP$ ist. (5 Punkte)

5. Die Menge der *booleschen Formeln* zu einer Variablenmenge X sei wie folgt definiert: „true“ und „false“ sind boolesche Formeln der Länge 0. „ x “ und „ $\bar{x}$ “ (für $x \in X$) sind boolesche Formeln der Länge 1. Sind ϕ und ϕ' boolesche Formeln der Längen k bzw. k' , dann sind „ $(\phi \wedge \phi')$ “ und „ $(\phi \vee \phi')$ “ boolesche Formeln der Länge $k + k'$. Weitere boolesche Formeln gibt es nicht.

Betrachten Sie nun folgendes Problem: Zu einer gegebenen booleschen Formel soll eine äquivalente boolesche Formel minimaler Länge gefunden werden. Dabei heißen zwei boolesche Formeln *äquivalent*, wenn Sie bei natürlicher Auswertung für jede Wahrheitsbelegung der Variablen dasselbe Ergebnis liefern. Zeigen Sie, dass es genau dann einen polynomiellen Algorithmus für dieses Problem gibt, wenn $P = NP$ gilt. (5 Bonuspunkte ¹)

Sie finden den aktuellen Übungszettel stets auf der Übungs-Seite der Vorlesung:

http://www.or.uni-bonn.de/lectures/ws25/edm_uebung_ws25.html

Abgabe: Donnerstag, den 29.1.2026, 16:00 Uhr über die eCampus-Seite der eigenen Übungsgruppe.

https://ecampus.uni-bonn.de/goto_ecampus_crs_3864991.html

¹Diese Punkte zählen nicht bei der Berechnung der zu erreichenden Gesamtpunktzahl mit.