

Einführung in die Diskrete Mathematik

5. Übung

1. Sei G ein gerichteter Graph mit Kantengewichten $c : E(G) \rightarrow \mathbb{R}_+$. Seien $s, t \in V(G)$, $L \subseteq V(G)$, $L \neq \emptyset$, so dass von jedem Knoten aus jedes Element von L erreichbar ist, und $\pi(v) := \min \left\{ 0, \min_{l \in L} (\text{dist}_{(G,c)}(t, l) - \text{dist}_{(G,c)}(v, l)) \right\}$ für $v \in V(G)$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:
 - (a) π ist ein zulässiges Potential in (G, c) .
 - (b) Jeder kürzeste s - t -Weg in (G, c_π) ist ein kürzester s - t -Weg in (G, c) .
 - (c) $\left\{ v \in V(G) \mid \text{dist}_{(G,c_\pi)}(s, v) < \text{dist}_{(G,c_\pi)}(s, t) \right\} \subseteq \left\{ v \in V(G) \mid \text{dist}_{(G,c)}(s, v) < \text{dist}_{(G,c)}(s, t) \right\}$.
(2+1+3 Punkte)

Bemerkung: Wenn man eine große Anzahl von Kürzeste-Wege-Berechnungen im selben Graphen aber mit unterschiedlichen Start- und Endknoten durchführen muss, kann es sich lohnen, vorher Abstände zu einer gewissen Menge L von Knoten zu berechnen, die als Orientierungspunkte dienen. Unter Ausnutzung der obigen Eigenschaften kann man damit die Aufrufe von DIJKSTRAS ALGORITHMUS in der Praxis beschleunigen.

2. Betrachten Sie folgende Version des BELLMAN-FORD-ALGORITHMUS: Solange es eine Kante (v, w) mit $l(w) > l(v) + c((v, w))$ gibt, wähle eine beliebige solche Kante aus und setze $l(w) = l(v) + c((v, w))$. Zeigen Sie, dass diese Vorgehensweise bei einer ungeschickten Wahl der Kantenreihenfolge eine exponentielle Zahl von Knotenlabel-Änderungen notwendig machen kann.
(4 Punkte)
3. Die Zeitsteuerungsbedingungen („timing constraints“) eines Logikchips lassen sich durch einen gerichteten Graphen G mit Kantengewichten $c : E(G) \rightarrow \mathbb{R}_+$ darstellen. Dabei entsprechen die Knoten den Speicherelementen und die Kanten gewissen durch die kombinatorische Logik definierten Wegen, während die Gewichte (Schätzungen der) Signallaufzeiten entsprechen. Eine Teilaufgabe des Chip-Designs ist es, einen optimalen Takt-Zeitplan zu finden, d.h. eine möglichst kleine Zahl $T \geq 0$ und eine Abbildung $a : V(G) \rightarrow \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass $a(v) + c((v, w)) \leq a(w) + T$ für alle $(v, w) \in E(G)$. Hierbei ist T die Zykluszeit des Chips, und $a(v)$ bzw. $a(v) + T$ sind die Startzeit bzw. die späteste zulässige Ankunftszeit des Signals in v .
 - a) Reduzieren Sie das Problem, das optimale T zu finden, auf das MINIMUM-MEAN-CYCLE-PROBLEM.
 - b) Zeigen Sie, wie man die Zahlen $a(v)$ einer optimalen Lösung effizient bestimmen kann.
 - c) Typischerweise sind einige der Zahlen $a(v)$ vorab festgelegt. Man zeige, wie man in diesem Fall das Problem lösen kann.
(5 Punkte)

4. Betrachten Sie folgendes Problem: Gegeben sei ein zusammenhängender ungerichteter Graph G mit Abbildungen $a : E(G) \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ und $b : E(G) \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$. Gesucht ist ein Spannbaum T in G , der

$$\frac{\sum_{e \in E(T)} a(e)}{\sum_{e \in E(T)} b(e)}$$

minimiert. Zeigen Sie, dass es für dieses Problem einen stark polynomiellen Algorithmus gibt.
(5 Punkte)

Sie finden den aktuellen Übungszettel stets auf der Übungs-Seite der Vorlesung:
http://www.or.uni-bonn.de/lectures/ws25/edm_uebung_ws25.html

Abgabe: Donnerstag, den 27.11.2025, 16:00 Uhr über die eCampus-Seite der eigenen Übungsgruppe.

https://ecampus.uni-bonn.de/goto_ecampus_crs_3864991.html