Wintersemester 2025/26 Prof. Dr. S. Held Dr. U. Brenner

Einführung in die Diskrete Mathematik 5. Übung

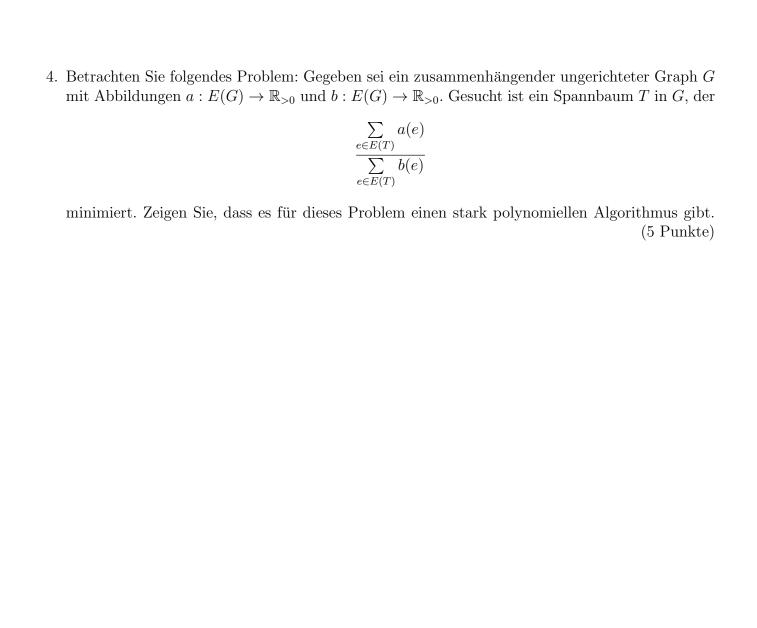
- 1. Sei G ein gerichteter Graph mit Kantengewichten $c: E(G) \to \mathbb{R}_+$. Seien $s, t \in V(G)$, $L \subseteq V(G)$, $L \neq \emptyset$, so dass von jedem Knoten aus jedes Element von L erreichbar ist, und $\pi(v) := \min \left\{ 0, \min_{l \in L} \left(\operatorname{dist}_{(G,c)}(t,l) \operatorname{dist}_{(G,c)}(v,l) \right) \right\}$ für $v \in V(G)$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:
 - (a) π ist ein zulässiges Potential in (G, c).
 - (b) Jeder kürzeste s-t-Weg in (G, c_{π}) ist ein kürzester s-t-Weg in (G, c).

(c)
$$\left\{v \in V(G) \mid \operatorname{dist}_{(G,c_{\pi})}(s,v) < \operatorname{dist}_{(G,c_{\pi})}(s,t)\right\} \subseteq \left\{v \in V(G) \mid \operatorname{dist}_{(G,c)}(s,v) < \operatorname{dist}_{(G,c)}(s,t)\right\}.$$

$$(2+1+3 \operatorname{Punkte})$$

Bemerkung: Wenn man eine große Anzahl von Kürzeste-Wege-Berechnungen im selben Graphen aber mit unterschiedlichen Start- und Endknoten durchführen muss, kann es sich lohnen, vorher Abstände zu einer gewissen Menge L von Knoten zu berechnen, die als Orientierungspunkte dienen. Unter Ausnutzung der obigen Eigenschaften kann man damit die Aufrufe von DIJKSTRAS ALGORITHMUS in der Praxis beschleunigen.

- 2. Betrachten Sie folgende Version des Bellman-Ford-Algorithmus: Solange es eine Kante (v,w) mit l(w) > l(v) + c((v,w)) gibt, wähle eine beliebige solche Kante aus und setze l(w) = l(v) + c((v,w)). Zeigen Sie, dass diese Vorgehensweise bei einer ungeschickten Wahl der Kantenreihenfolge eine exponentielle Zahl von Knotenlabel-Änderungen notwendig machen kann. (4 Punkte)
- 3. Die Zeitsteuerungsbedingungen ("timing constraints") eines Logikchips lassen sich durch einen gerichteten Graphen G mit Kantengewichten $c:E(G)\to\mathbb{R}_+$ darstellen. Dabei entsprechen die Knoten den Speicherelementen und die Kanten gewissen durch die kombinatorische Logik definierten Wegen, während die Gewichte (Schätzungen der) Signallaufzeiten entsprechen. Eine Teilaufgabe des Chip-Designs ist es, einen optimalen Takt-Zeitplan zu finden, d.h. eine möglichst kleine Zahl $T\geq 0$ und eine Abbildung $a:V(G)\to\mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass $a(v)+c((v,w))\leq a(w)+T$ für alle $(v,w)\in E(G)$. Hierbei ist T die Zykluszeit des Chips, und a(v) bzw. a(v)+T sind die Startzeit bzw. die späteste zulässige Ankunftszeit des Signals in v.
 - a) Reduzieren Sie das Problem, das optimale T zu finden, auf das MINIMUM-MEAN-CYCLE-PROBLEM.
 - b) Zeigen Sie, wie man die Zahlen a(v) einer optimalen Lösung effizient bestimmen kann.
 - c) Typischerweise sind einige der Zahlen a(v) vorab festgelegt. Man zeige, wie man in diesem Fall das Problem lösen kann. (5 Punkte)



Sie finden den aktuellen Übungszettel stets auf der Übungs-Seite der Vorlesung: http://www.or.uni-bonn.de/lectures/ws25/edm_uebung_ws25.html

Abgabe: Donnerstag, den 27.11.2025, 16:00 Uhr über die eCampus-Seite der eigenen Übungsgruppe.

https://ecampus.uni-bonn.de/goto_ecampus_crs_3864991.html