

## Einführung in die Diskrete Mathematik

### 11. Übung

1. Für konstantes  $k \in \mathbb{Z}_{>0}$  sei  $\Phi$  eine  $k$ -Band-Turingmaschine, die eine Sprache  $L$  berechnet. Zeigen Sie, dass es dann eine (1-Band-)Turingmaschine  $\Phi'$  gibt, die ebenfalls  $L$  berechnet, sodass  $\text{time}(\Phi', x) = O((\text{time}(\Phi, x))^2)$  für jede Eingabe  $x$  gilt. (5 Punkte)
2. Man beweise: Ist  $\mathcal{P} \in NP$ , so gibt es ein Polynom  $p$ , sodass für  $\mathcal{P}$  ein Algorithmus mit Laufzeit  $O(2^{p(n)})$  existiert, wobei  $n$  die Länge der Eingabe sei. (4 Punkte)
3. Beweisen Sie, dass folgende Entscheidungsprobleme in  $NP$  sind:

- (a) Gegeben seien ein zusammenhängender ungerichteter Graph  $G$ , Kantengewichte  $c : E(G) \rightarrow \mathbb{Z}_+$  und eine natürliche Zahl  $k$ . Gibt es einen aufspannenden Subgraphen  $H$  von  $G$  mit  $|E(H)| \leq k$  und Gewichte  $c' : E(H) \rightarrow \mathbb{R}_+$ , so dass

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \text{dist}_{(G,c)}(s, t) \leq \text{dist}_{(H,c')}(s, t) \leq \sqrt{2} \text{dist}_{(G,c)}(s, t)$$

für alle  $s, t \in V(G)$  gilt?

- (b) Gegeben seien eine natürliche Zahl  $n$  und natürliche Zahlen  $a_i, b_i$  für  $i = 1, \dots, n$ . Kann man  $n$  Quadrate mit Kantenlängen  $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \dots, \frac{a_n}{b_n}$  achsenparallel in das Einheitsquadrat packen? Die Quadrate dürfen sich dabei berühren, aber nicht überlappen. (3+3 Punkte)

4. Weihnachtsaufgabe:

In Abbildung 1 (umseitig) sehen Sie einen stark vereinfachten Plan der Skipisten in Zermatt. Die Pisten selbst sind in rot dargestellt, Skilifte und andere Transportmöglichkeiten in schwarz. Was ist die kürzeste Zeit, in der man, wenn man in Zermatt beginnt und endet, alle Skipisten abfahren kann? Zeigen Sie (auf möglichst einfache Weise), dass Ihre Lösung tatsächlich optimal ist. (5 Bonuspunkte)

**Abgabe:** Dienstag, der 11.1.2022, **vor** der Vorlesung im Hörsaal

#### Veranstaltungshinweis der Gleichstellungs-AG:

Am 15.01.2022 von 15:00 bis 17:30 Uhr laden wir alle Mathematik- und Informatikstudentinnen<sup>1</sup> zu einem Online-Event zum Thema "Netzwerke und Karrierewege" ein. Hier geht's zur Anmeldung: <http://www.hcm.uni-bonn.de/networking-career-paths/>

<sup>1</sup>Es sind alle Personen eingeladen, die weiblich, intersexuell, nicht-binär, transgender oder agender sind.

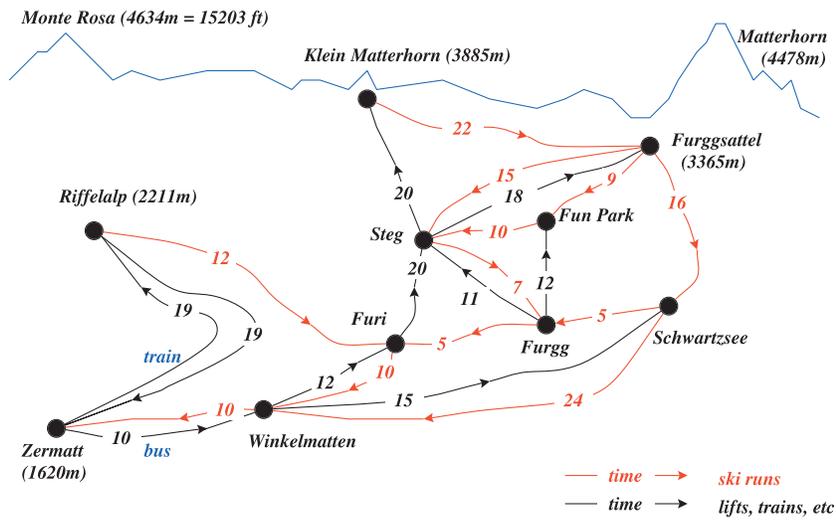


Abbildung 1: Skipisten in Zermatt.