Wintersemester 2019/20
Prof. Dr. B. Korte
Dr. U. Brenner

Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Universität Bonn

Kombinatorik, Graphen, Matroide
5. Übung

1. Betrachten Sie folgendes Problem: Gegeben sei ein ungerichteter Graph G mit Kantengewichten $c : E(G) \to \mathbb{N}$ und Knotenlabeln $k : V(G) \to \mathbb{N}$. Gesucht ist ein Teilgraph H von G mit maximalem Kantengewicht, sodass für H eine Orientierung existiert (d.h. für Kanten $\{v, w\}$ wird entweder die Kante (v, w) oder die Kante (w, v) ausgewählt), in der jeder Knoten $v \in V(H)$ höchstens Eingangsgrad $k(v)$ hat. Zeigen Sie, dass es für dieses Problem einen polynomiellen Algorithmus gibt. (4 Punkte)

2. Zu einem gerichteten Graph G mit Kantengewichten $c : E(G) \to \mathbb{R}_+$ soll ein Teilgraph H gefunden werden, der eine Vereinigung von knotendisjunkten Wegen und Kreisen ist, so dass $\sum_{e \in E(H)} c(e)$ maximal ist. Zeigen Sie, dass es für dieses Problem einen polynomiellen Algorithmus gibt. (4 Punkte)

3. Betrachten Sie folgendes Spiel: Gegeben sei ein leerer Graph mit n_0 Knoten, der planar in die Ebene eingebettet ist. Spieler A und Spieler B führen nun abwechselnd Züge der folgenden Art durch: In jedem Zug werden zwei Knoten, die jeweils höchstens Grad 2 haben, durch einen Weg der Länge zwei verbunden, der jeweils über einen neu hinzugefügten Knoten führt. Der neu hinzugefügte Weg ist dabei so in die Ebene einzubetten, dass sich mit den schon eingebetteten Knoten und Kanten eine planare Einbettung des erweiterten Graphen ergibt. Spieler A beginnt, und es gewinnt der Spieler, der den letzten Zug ausführt. Kann dieses Spiel beliebig lang fortgesetzt werden? Für welchen Spieler gibt es für $n_0 = 2$ eine Gewinnstrategie? (4 Punkte)

4. Es sei G ein einfacher planarer Graph mit fester Einbettung, und jede Kante sei entweder rot oder blau gefärbt. Für jeden Knoten v seien $e_1(v), \ldots, e_{|\delta_G(v)|}(v)$ die zu v inzidenten Kanten in der zyklischen Reihenfolge ihrer Einbettung. Die Zahl der *Farbwechsel* an einem Knoten v sei definiert als die Zahl der Indizes $i \in \{1, \ldots, |\delta_G(v)|\}$, für die e_i eine andere Farbe als e_{i+1} hat (wobei wir $e_{|\delta_G(v)|+1}(v) = e_1(v)$ setzen). Zeigen Sie, dass es mindestens einen Knoten mit höchstens zwei Farbwechseln geben muss. (4 Punkte)

Abgabe: Donnerstag, den 14.11.2019, vor der Vorlesung.