

Einführung in die Diskrete Mathematik

13. Übung

1. Man beschreibe eine Turingmaschine mit Alphabet $\{0, 1, \#\}$, die zwei binäre Strings a und b vergleicht: Der Input bestehe dabei aus einem String $a\#b$ mit $a, b \in \{0, 1\}^*$. Die Berechnung soll im Ja-Zustand enden, wenn beide Strings gleich sind, und sonst im Nein-Zustand. (5 Punkte)
2. Man beweise: Ist $\mathcal{P} \in NP$, so gibt es ein Polynom p , sodass für \mathcal{P} ein Algorithmus mit Laufzeit $O(2^{p(n)})$ existiert, wobei n die Länge der Eingabe sei. (3 Punkte)
3. Beweisen Sie, dass folgende Entscheidungsprobleme in NP sind:

- (a) Gegeben seien ein zusammenhängender ungerichteter Graph G , Kantengewichte $c : E(G) \rightarrow \mathbb{Z}_+$ und eine natürliche Zahl k . Gibt es einen aufspannenden Subgraphen H von G mit $|E(H)| \leq k$ und Gewichte $c' : E(H) \rightarrow \mathbb{R}_+$, so dass

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \text{dist}_{(G,c)}(s, t) \leq \text{dist}_{(H,c')}(s, t) \leq \sqrt{2} \text{dist}_{(G,c)}(s, t)$$

für alle $s, t \in V(G)$ gilt?

- (b) Gegeben seien eine natürliche Zahl n und natürliche Zahlen a_i, b_i für $i = 1, \dots, n$. Kann man n Quadrate mit Kantenlängen $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \dots, \frac{a_n}{b_n}$ achsenparallel in das Einheitsquadrat packen? Die Quadrate dürfen sich dabei berühren, aber nicht überlappen. (4+4 Punkte)
4. (a) Zeigen Sie, dass 2SAT, also die Einschränkung des SATISFIABILITY-Problems auf Instanzen, in denen jede Klausel höchstens zwei Literale hat, in polynomieller Zeit lösbar ist.
 - (b) Man beschreibe einen Algorithmus mit linearer Laufzeit, der für jede SATISFIABILITY-Instanz eine Wahrheitsbelegung bestimmt, die mindestens die Hälfte aller Klauseln erfüllt. (2+2 Punkte)

Abgabe: Dienstag, den 21.1.2020, **vor** der Vorlesung.

Die Ergebnisse dieses Übungszettels haben keinen Einfluss mehr auf die Zulassung zur Klausur.