Wintersemester 2019/20
Prof. Dr. S. Hougardy
Dr. U. Brenner

Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Universität Bonn

Einführung in die Diskrete Mathematik
9. Übung

1. Sei (G, u, s, t) ein Netzwerk. Man nenne einen s-t-Präfluss f in (G, u) maximal, wenn $\mathrm{ex}_f(t)$ maximal ist.

   (a) Man zeige, dass es für jeden maximalen s-t-Präfluss f einen maximalen s-t-Fluss f' mit $f'(e) \leq f(e)$ für alle $e \in E(G)$ gibt.

   (b) Man zeige, wie man in $O(nm)$ Zeit einen maximalen s-t-Präfluss in einen maximalen s-t-Fluss umwandeln kann. (2+2 Punkte)

2. Man zeige, dass der Goldberg-Tarjan-Algorithmus $O(n^2m)$ nichtsaturierende Pushes durchführt, unabhängig von der Wahl des aktiven Knotens v in den Iterationen. (4 Punkte)
   Hinweis: Betrachten Sie $\Phi := \sum_{v \text{ aktiv}} \psi(v)$.

3. Sei (G, u, s, t) ein Netzwerk, $n = |V(G)|$, f ein s-t-Präfluss in (G, u) und ψ eine Distanzmarkierung bezüglich f mit $\psi(v) \leq 2n$ für alle $v \in V(G)$. Sei $\psi'(v) := \min\{\mathrm{dist}_{G_f}(v, t), n + \mathrm{dist}_{G_f}(v, s), 2n\}$ für alle $v \in V(G)$.
   Zeigen Sie: ψ' ist eine Distanzmarkierung bezüglich f, und es gilt $\psi(v) \leq \psi'(v)$ für alle $v \in V(G)$. (5 Punkte)

4. Betrachten Sie das Maximum-Flow-Problem eingeschränkt auf Instanzen (G, u, s, t), für die $G - t$ eine Arboreszenz ist. Zeigen Sie, dass man das so eingeschränkte Problem in linearer Zeit lösen kann. (2 Punkte)
   Hinweis: Benutzen Sie Tiefensuche.

Abgabe: Dienstag, den 9.12.2019, **vor** der Vorlesung.