Einführung in die Diskrete Mathematik
6. Übung

1. Berechnen Sie in dem Graphen, der in Abbildung 1 dargestellt ist, mit Hilfe des Algorithmus von Edmonds ein gewichtsmaximales Branching. Geben Sie auch die Graphen an (mit den zugehörigen Kantengewichten), die während des Algorithmus durch Kontraktion entstehen.

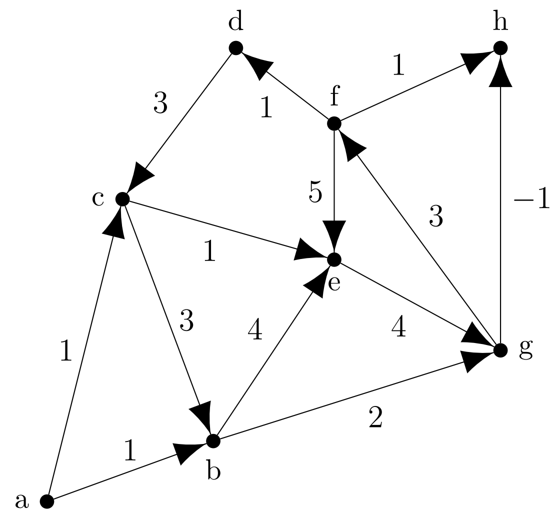

Abbildung 1: Instanz zur Berechnung eines maximal gewichteten Branchings.

(2 Punkte)

2. Sei G ein gerichteter Graph mit $r \in V(G)$. Für jeden Knoten aus $v \in V(G) \setminus \{r\}$ gebe es k kantendisjunkte r-v-Wege in G, aber die Herausnahme eine beliebigen Kante zerstört diese Eigenschaft. Zeigen Sie, dass jeder Knoten in $V(G) \setminus \{r\}$ genau k eingehende Kanten hat. (4 Punkte)

3. Es sei G ein zusammenhängender ungerichteter Graph mit mindestens 2 Knoten, der auch nach dem Entfernen von $2k - 1$ beliebigen Kanten zusammenhängend bleibt. Zeigen Sie, dass G mindestens k paarweise kantendisjunkte aufspannende Bäume enthält. (4 Punkte)

4. Sei G ein gerichteter Graph mit Kantenlängen $c : E(G) \to \mathbb{R}_+$ und $s, t \in V$. Wir wollen einen kürzesten s–t–Weg finden, indem wir Dijkstras Algorithmus von beiden Knoten s und t aus starten, wobei wir für die Suche von t aus die Kanten natürlich in umgekehrter Richtung durchlaufen. Wir stoppen, sobald ein Knoten $v \in V$ für beide Suchen aus der Menge Q entfernt wurde.

   a) Geben Sie ein Beispiel an, in dem dann $l_s(v) + l_t(v) > \mathrm{dist}_{G,c}(s,t)$ gilt (wobei l_s und l_t die von den beiden Dijkstra-Aufrufen vergebenen Knotenmarkierungen seien).
   b) Wie findet man mit dieser Abbruchbedingung dennoch einen kürzesten s–t–Weg? (5 Punkte)

Abgabe: Dienstag, den 19.11.2019, **vor** der Vorlesung.