Wintersemester 2018/19
Prof. Dr. S. Held
Dr. U. Brenner

Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Universität Bonn

Einführung in die Diskrete Mathematik
8. Übung

1. Sei (G, u, b, c) eine Instanz des Minimum-Cost-Flow-Problems. Man nennt eine Funktion $\pi : V(G) \to \mathbb{R}$ ein *optimales Potential*, falls es einen b-Fluss f in (G, u) mit minimalen Kosten gibt, so dass π ein zulässiges Potential bezüglich (G_f, c) ist.

   (a) Man beweise, dass eine Funktion $\pi : V(G) \to \mathbb{R}$ genau dann ein optimales Potential ist, wenn für jedes $X \subseteq V(G)$ die folgende Ungleichung gilt:
   $$b(X) + \sum_{e\in\delta^-(X):c_\pi(e)<0} u(e) \leq \sum_{e\in\delta^+(X):c_\pi(e)\leq 0} u(e). \qquad (*)$$

   (b) Man zeige, wie man in polynomieller Zeit für eine gegebene Funktion $\pi : V(G) \to \mathbb{R}$ entweder eine die Bedingung $(*)$ verletzende Menge X findet oder entscheidet, dass es keine solche gibt.

   (c) Zeigen Sie, wie man für ein gegebenes optimales Potential einen b-Fluss mit minimalen Kosten in $O(m + n^3)$ Zeit findet. (3+2+2 Punkte)

2. Wir betrachten ein Verfahren, das aus dem Sukzessive-Kürzeste-Wege-Algorithmus entsteht, indem man stets um $\gamma' := \min\left\{ \min_{e\in E(P)} u_f(e), \quad \max\{b'(s), -b'(t)\}\right\}$ augmentiert. Zeigen Sie, dass dieser Algorithmus bei ganzzahligen b-Werten und Kapazitäten ebenfalls nach höchstens $\frac{1}{2}\sum_{v\in V(G)} |b(v)|$ Augmentierungen terminiert. (3 Punkte)

3. Sei (G, u, b, c) eine Instanz des Minimum-Cost-Flow-Problems. Sei $e_0 \in E(G)$ eine Kante mit $c(e_0) > (|V(G)| - 1) \max_{e\in E(G)\setminus\{e_0\}} |c(e)|$. Beweisen Sie die folgende Aussage: Wenn es einen b-Fluss g in (G, u) mit $g(e_0) = 0$ gibt, dann gilt $f(e_0) = 0$ für jede Optimallösung f. (5 Punkte)

4. Ein Restaurantbesitzer steht vor folgendem Problem: Er weiß, dass er für den Tag i der nächsten Woche d_i frische Servietten benötigt $(i = 1, \dots, 7)$. Jeden Morgen kann er frische Servietten zum Preis von a Euro pro Stück kaufen. Ferner kann er jeden Abend einen Teil seiner Servietten in die Reinigung geben. Dabei gibt es die Schnellreinigung und die Standardreinigung zum Preis von b Euro pro Serviette bzw. c Euro pro Serviette. Bei der Standardreinigung erhält man die Servietten am übernächsten Tag morgens gereinigt zurück. Die Schnellreinigung liefert die Servietten bereits am nächsten Morgen. Es gilt $c < b < a$. Führen Sie das Problem, eine kostenminimale "Serviettenstrategie" zu finden, auf ein Minimum-Cost-Flow-Problem zurück. (5 Punkte)

Abgabe: Donnerstag, den 13.12.2018, **vor** der Vorlesung.