

Einführung in die Diskrete Mathematik

7. Übung

1. Man betrachte eine Verallgemeinerung des MINIMUM-COST-FLOW-PROBLEMS, bei der unendliche Kapazitäten erlaubt sind (d.h. $u(e) = \infty$ für manche Kanten e). Eine Instanz (G, u, b, c) heißt *unbeschränkt*, wenn es für jedes $\gamma \in \mathbb{R}$ einen b -Fluss f in (G, u) gibt mit $c(f) < \gamma$.
 - (a) Man zeige, dass eine Instanz genau dann unbeschränkt ist, wenn es einen b -Fluss in (G, u) gibt und ein negativer Kreis existiert, dessen Kanten alle unendliche Kapazität haben.
 - (b) Man zeige, wie man in $O(n^3 + m)$ -Zeit entscheiden kann, ob eine Instanz unbeschränkt ist.
 - (c) Man zeige, dass in einer nicht unbeschränkten Instanz jede unendliche Kapazität auf äquivalente Weise durch eine endliche Kapazität ersetzt werden kann. (2+1+2 Punkte)

2. Man beweise den Zirkulationssatz von Hoffman: Gegeben seien ein gerichteter Graph G und untere bzw. obere Schranken $l, u : E(G) \rightarrow \mathbb{R}_+$ mit $l(e) \leq u(e)$ für alle $e \in E(G)$. Es gibt genau dann eine Zirkulation $f : E(G) \rightarrow \mathbb{R}_+$ mit $l(e) \leq f(e) \leq u(e)$ für alle $e \in E(G)$, wenn

$$\sum_{e \in \delta^-(X)} l(e) \leq \sum_{e \in \delta^+(X)} u(e) \quad \text{für alle } X \subseteq V(G) \text{ gilt.}$$

(5 Punkte)

3. Sei (G, u, b, c) eine Instanz des MINIMUM-COST-FLOW-PROBLEMS, für das eine zulässige Lösung existiere. Zeigen Sie, dass es dann eine kostenminimale Lösung f gibt, für die eine Kantenmenge $F \subseteq E(G)$ existiert, so dass der $(V(G), F)$ zugrundeliegende ungerichtete Graph kreisfrei ist und auf allen Kanten $e \in E(G) \setminus F$ gilt: $f(e) \in \{0, u(e)\}$. (5 Punkte)
4. Aufgrund eines erst jetzt entdeckten Fehlers im Buchungssystem hat ein großes Hotel für das Jahr 2019 viele Buchungen angenommen, ohne die Verfügbarkeit freier Zimmer zu prüfen. Jede Buchung betrifft einen bestimmten Zeitraum; es wird aber immer nur ein Zimmer benötigt. Alle Zimmer sind gleichwertig, dennoch wurden die Buchungen zu unterschiedlichen Preisen vorgenommen. Das Hotel möchte nun einigen Kunden absagen, so dass die freien Zimmer ausreichen und möglichst wenige Einnahmen verlorengehen. Wie würden Sie dieses Problem lösen? Kann man erreichen, dass kein Gast während seines Aufenthalts umziehen muss? (5 Punkte)