Wintersemester 2018/19
Prof. Dr. S. Held
Dr. U. Brenner

Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Universität Bonn

Einführung in die Diskrete Mathematik
1. Übung

1. Es sei S eine Menge mit n Elementen und $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_n\}$ eine Menge von paarweise verschiedenen Teilmengen von S. Zeigen Sie, dass es dann ein $x \in S$ geben muss, für das auch die Mengen $A_i \cup \{x\}$ $(i = 1 \dots, n)$ paarweise verschieden sind. (4 Punkte)

   Hinweis: Betrachten Sie einen ungerichteten Graphen G mit Knotenmenge $\mathcal{A}$, in dem für jede Kante $\{A_i, A_j\}$ gilt: $|(A_i \setminus A_j) \cup (A_j \setminus A_i)| = 1$.

2. An einem Tennisturnier nehmen genau n Spieler teil. Jeder spielt genau einmal gegen jeden anderen. Es gibt keine Unentschieden. Am Ende soll eine Rangliste der Spieler aufgestellt werden, d.h. eine Nummerierung mit $s_1, \dots, s_n$, und zwar so, dass s_i gegen s_{i+1} gewonnen hat für alle $i = 1, \dots, n-1$.

   (a) Man zeige, dass dies immer möglich ist.

   (b) Man finde einen Algorithmus, der die Ergebnisliste als Eingabe bekommt und eine solche Rangliste in $O(n^k)$ Rechenschritten bestimmt, wobei k eine Konstante sei. Wie klein kann k gewählt werden? (4 Punkte)

3. Sei $G = (V, E)$ ein einfacher ungerichteter Graph. Zeigen Sie, dass dann gilt:

   (a) Es gibt eine Aufteilung $V = V_1 \dot\cup V_2$ der Knotenmenge, so dass alle Knoten in $G[V_1]$ und $G[V_2]$ geraden Grad haben (wobei $G[X]$ für eine Knotenmenge X den von X induzierten Subgraphen bezeichne).

   (b) Es gibt eine Aufteilung $V = V_1 \dot\cup V_2$ der Knotenmenge, so dass alle Knoten in $G[V_1]$ geraden Grad und alle Knoten in $G[V_2]$ ungeraden Grad haben.

   Beachten Sie, dass hier auch Aufteilungen erlaubt sind, in denen eine Teilmenge leer ist. (6 Punkte)

4. Zeigen Sie, dass jeder Graph mit n Knoten und mehr als $\frac{1}{2}n^{\frac{3}{2}}$ Kanten einen Kreis der Länge höchstens 4 besitzt. (6 Punkte)

Abgabe: Donnerstag, den 18.10.2018, **vor** der Vorlesung.