Wintersemester 2017/18
Prof. Dr. J. Vygen
Dr. U. Brenner

Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Universität Bonn

Einführung in die Diskrete Mathematik
11. Übung

1. Sei G ein gerichteter Graph mit konservativen Kantengewichten $c : E(G) \to \mathbb{R}$. Seien $s, t \in V(G)$, wobei t in G von s aus erreichbar sei. Man zeige: Die minimale Länge eines s-t-Weges in G ist gleich dem maximalen Wert von $\pi(t) - \pi(s)$, wobei π ein zulässiges Potential von (G, c) sei. (3 Punkte)

2. (a) Zeigen Sie, dass 2SAT, also die Einschränkung des SATISFIABILITY-Problems auf Instanzen, in denen jede Klausel höchstens zwei Literale hat, in polynomieller Zeit lösbar ist.

   (b) Man beschreibe einen Algorithmus mit linearer Laufzeit, der für jede SATISFIABILITY-Instanz eine Wahrheitsbelegung bestimmt, die mindestens die Hälfte aller Klauseln erfüllt. (4+2 Punkte)

3. Beschreiben Sie eine Turingmaschine auf dem Alphabet $\{0, 1\}$, die eine natürliche Zahl x mit 5 multipliziert. Die Eingabe bestehe aus einer binären Kodierung von x, und nach der Berechnung soll auf dem Band nur eine Zeichenkette stehen, die $5 \cdot x$ binär kodiert (bei der binären Darstellung von natürlichen Zahlen sollen dabei keine führenden Nullen auftreten). (5 Punkte)

4. Beweisen Sie, dass folgende Entscheidungsprobleme in NP sind:

   (a) Gegeben seien ein zusammenhängender ungerichteter Graph G, Kantengewichte $c : E(G) \to \mathbb{Z}_+$ und eine natürliche Zahl k. Gibt es einen aufspannenden Subgraphen H von G mit $|E(H)| \le k$ und Gewichte $c' : E(H) \to \mathbb{R}_+$, so dass

   $$\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{dist}_{(G,c)}(s,t) \le \operatorname{dist}_{(H,c')}(s,t) \le \sqrt{2} \operatorname{dist}_{(G,c)}(s,t)$$

   für alle $s, t \in V(G)$ gilt?

   (b) Gegeben seien eine natürliche Zahl n und natürliche Zahlen a_i, b_i für $i = 1, \ldots, n$. Kann man n Quadrate mit Kantenlängen $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \ldots, \frac{a_n}{b_n}$ achsenparallel in das Einheitsquadrat packen? Die Quadrate dürfen sich dabei berühren, aber nicht überlappen. (3+3 Punkte)

Abgabe: Dienstag, den 16.1.2018, vor der Vorlesung.