Wintersemester 2017/18
Prof. Dr. J. Vygen
Dr. U. Brenner

Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Universität Bonn

Einführung in die Diskrete Mathematik
10. Übung

1. In Abbildung 1 sehen Sie einen stark vereinfachten Plan der Skipisten in Zermatt. Die Pisten selbst sind in rot dargestellt, Skilifte und andere Transportmöglichkeiten in schwarz. Was ist die kürzeste Zeit, in der man, wenn man in Zermatt beginnt und endet, alle Skipisten abfahren kann? Zeigen Sie (auf möglichst einfache Weise), dass Ihre Lösung tatsächlich optimal ist. (5 Punkte)

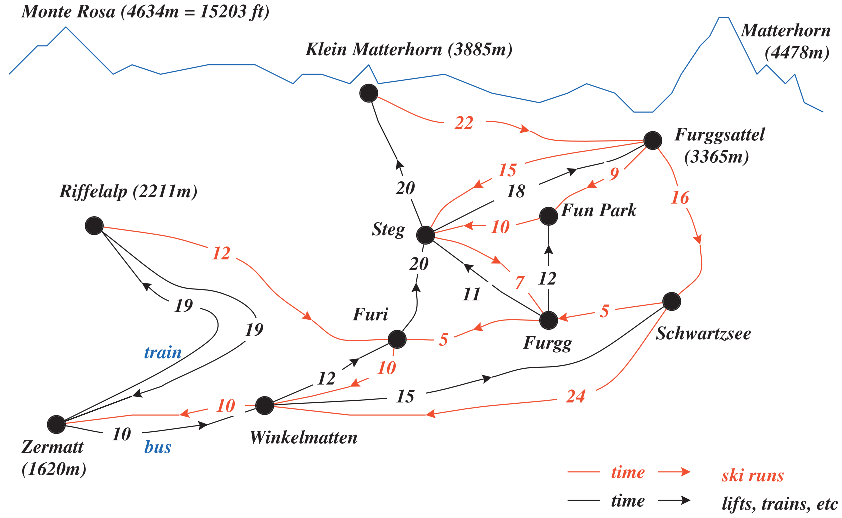

Abbildung 1: Skipisten in Zermatt.

2. Es sei G ein bipartiter Graph mit Bipartition $V(G) = A \dot\cup B$, $A = \{a_1, \ldots, a_k\}$ und $B = \{b_1, \ldots, b_k\}$. Für jeden Vektor $x = (x_e)_{e \in E(G)}$ sei $M_G(x) = (m_{ij}^x)_{1 \le i,j \le k}$ die Matrix mit
$$m_{ij}^x := \begin{cases} x_e & \text{für } e = \{a_i, b_j\} \in E(G), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$
Die Determinante $\det M_G(x)$ ist dann also ein Polynom in $x = (x_e)_{e \in E(G)}$. Zeigen Sie, dass G genau dann ein perfektes Matching besitzt, wenn $\det M_G(x)$ nicht identisch Null ist. (2 Punkte)

3. Es sei G ein azyklischer gerichteter Graph.
   (a) Beweisen Sie, dass die minimale Anzahl von Wegen in G, von denen alle Knoten überdeckt werden, gleich der maximalen Anzahl von Knoten ist, von denen keine zwei auf demselben Weg liegen.
   (b) Es sei $F \subseteq E(G)$. Zeigen Sie, dass dann die minimale Anzahl von Wegen, die F überdecken, gleich
   $$\max\{|C \cap F| \mid C \text{ ist ein gerichteter Schnitt in } G\}$$
   ist. (2+2 Punkte)

4. Betrachten Sie folgendes Problem: Zu einem gegebenen bipartiten Graph G mit Knotengewichten $c : V(G) \to \mathbb{R}$ wird eine stabile Menge $X \subseteq V(G)$ gesucht, deren Gewicht $\sum_{v \in X} c(v)$ maximal ist. Geben Sie einen möglichst effizienten Algorithmus für dieses Problem an. (3 Punkte)

Abgabe: Dienstag, den 9.1.2018, vor der Vorlesung.