Wintersemester 2017/18
Prof. Dr. J. Vygen
Dr. U. Brenner

Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Universität Bonn

Einführung in die Diskrete Mathematik
8. Übung

1. Im Tagebau sollen Rohstoffe gefördert werden. Jeder Kubikmeter Gestein wird durch einen Knoten in einem gerichteten Graphen G modelliert. Eine Kante $(v, w) \in E(G)$ bedeutet, dass v nicht abgebaut werden kann, ohne dass auch w abgebaut wird (zum Beispiel weil w oberhalb von v liegt). Der Abbau von einem Kubikmeter Gestein $v \in V(G)$ bringt einen (möglicherweise negativen) Profit $p(v)$. Wie bestimmt man effizient eine abzubauende Menge $X \subseteq V(G)$, die den maximalen Profit $p(X)$ bringt? (5 Punkte)

2. Man betrachte eine Verallgemeinerung des Minimum-Cost-Flow-Problems, bei der unendliche Kapazitäten erlaubt sind (d.h. $u(e) = \infty$ für manche Kanten e). Eine Instanz (G, u, b, c) heißt *unbeschränkt*, wenn es für jedes $\gamma \in \mathbb{R}$ einen b-Fluss f in (G, u) gibt mit $c(f) < \gamma$.

   (a) Man zeige, dass eine Instanz genau dann unbeschränkt ist, wenn es einen b-Fluss in (G, u) gibt und ein negativer Kreis existiert, dessen Kanten alle unendliche Kapazität haben.

   (b) Man zeige, wie man in $O(n^3 + m)$-Zeit entscheiden kann, ob eine Instanz unbeschränkt ist.

   (c) Man zeige, dass in einer nicht unbeschränkten Instanz jede unendliche Kapazität auf äquivalente Weise durch eine endliche Kapazität ersetzt werden kann. (2+1+2 Punkte)

3. Zeigen Sie, dass man sowohl das Kürzeste-Wege-Problem in gerichteten Graphen mit konservativen Kantengewichten als auch das Maximum-Flow-Problem als Spezialfall des Minimum-Cost-Flow-Problems auffassen kann. (2 Punkte)

4. Überlegen Sie sich, was passiert, wenn man den Minimum-Mean-Cycle-Cancelling-Algorithmus so abändert, dass man nicht mehr notwendigerweise einen Kreis mit minimalem Durchschnittsgewicht wählt, sondern entlang irgendeines beliebigen augmentierenden Kreises mit negativem Gewicht augmentiert (natürlich augmentiert man auf dem Kreise so viel wie möglich). Zeigen Sie, dass das veränderte Verfahren (bei ungeschickter Wahl der Kreise) nicht mehr unbedingt nach einer polynomiellen Anzahl von Augmentierungen terminiert, auch wenn alle Kantenkapazitäten ganzzahlig sind. (2 Punkte)

Abgabe: Dienstag, den 12.12.2017, vor der Vorlesung.