

## Einführung in die Diskrete Mathematik

### 7. Übung

1. Sei  $(G, u, s, t)$  ein Netzwerk. Man nenne einen  $s$ - $t$ -Präfluss  $f$  in  $(G, u)$  maximal, wenn  $\text{ex}_f(t)$  maximal ist.
  - (a) Man zeige, dass es für jeden maximalen  $s$ - $t$ -Präfluss  $f$  einen maximalen  $s$ - $t$ -Fluss  $f'$  mit  $f'(e) \leq f(e)$  für alle  $e \in E(G)$  gibt.
  - (b) Wie kann man in  $O(nm)$  Zeit einen maximalen  $s$ - $t$ -Präfluss in einen maximalen  $s$ - $t$ -Fluss umwandeln?  
(2+2 Punkte)
  
2. Beweisen Sie, dass der PUSH-RELABEL-ALGORITHMUS  $O(n^2m)$  nichtsaturierende Pushs durchführt, unabhängig von der Wahl des aktiven Knotens  $v$  in der Schleife des Algorithmus. (4 Punkte)  
Hinweis: Betrachten Sie  $\Phi := \sum_{v \text{ aktiv}} \psi(v)$ .
  
3. Sei  $G = (V, E)$  ein ungerichteter zusammenhängender Graph mit Kapazitäten  $u : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ . Sei  $\emptyset \neq A \subset V$ , so dass  $\delta(A)$  ein Schnitt mit minimaler Kapazität in  $G$  ist.
  - (a) Zeigen Sie, dass  $u(\delta(A)) \leq \frac{2}{n}u(E)$  gilt.
  - (b) Betrachten Sie das folgende Verfahren: Wählen Sie zufällig eine Kante und kontrahieren Sie sie, wobei eine Kante  $e$  mit Wahrscheinlichkeit  $\frac{u(e)}{u(E)}$  genommen wird. Wiederholen Sie diese Vorgehensweise, bis nur noch zwei Knoten übrig sind (die Wahlen der einzelnen Kanten sollen dabei unabhängig voneinander sein). Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit, dass nie eine Kante aus  $\delta(A)$  kontrahiert wird, mindestens  $\frac{2}{(n-1)n}$  beträgt.
  - (c) Zeigen Sie, dass man durch  $kn(n-1)$  unabhängige Wiederholungen des Verfahrens aus (b) mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens  $1 - e^{-2k}$  einen Schnitt mit minimaler Kapazität in  $G$  erhält.  
(2+2+2 Punkte)
  
4. Implementieren Sie den PUSH-RELABEL-ALGORITHMUS zur Berechnung eines maximalen  $s$ - $t$ -Flusses. Ihr Programm sollte höchstens  $O(n^2m)$  Laufzeit haben, idealerweise nur  $O(n^2\sqrt{m})$ . Ein genauere Beschreibung der Aufgabe finden Sie umseitig. (12 Punkte)

### Zur Programmieraufgabe:

Das Programm muss in C oder C++ geschrieben sein. Es wird empfohlen, C++ zu verwenden. In diesem Fall kann man zum Einlesen und Speichern der Graphen die Klasse `Graph` aus der Vorlesung "Algorithmische Mathematik I" aus dem Wintersemester 2016/2017 verwenden. Alle Datenstrukturen, die in dieser Vorlesung vorgestellt wurden, finden Sie hier:

<http://www.or.uni-bonn.de/~hougardy/alma/alma.html>

Sie können alle diese Programme und Datenstrukturen verwenden. Außerdem dürfen Sie die STL verwenden, aber keine weiteren externen Bibliotheken.

**Eingabeformat:** Eine gültige Datei, die einen Graphen beschreibt, hat das folgende Format:

Knotenanzahl

Knoten0a Knoten0b Kapazitaet0

Knoten1a Knoten1b Kapazitaet1

...

Die Einträge der Datei sind ausschließlich ganze Zahlen. Sie können voraussetzen, dass die Summe aller Zahlen in der Eingabe kleiner als  $2^{31}$  ist. In der ersten Zeile steht eine einzelne natürliche Zahl, welche die Anzahl der Knoten angibt. Jede weitere Zeile spezifiziert genau eine Kante. Die ersten beiden Einträge einer Zeile sind zwei verschiedene nichtnegative ganze Zahlen, welche die Nummern der Endknoten der Kante sind. Dabei nehmen wir an, dass, wenn wir  $n$  Knoten haben, die Knoten von 0 bis  $n - 1$  durchnummeriert sind. Der dritte Eintrag in der Zeile ist eine nichtnegative ganze Zahl, welche die Kapazität der Kante bezeichnet. Der Index einer jeden Kante ist durch ihre Zeilennummer in der Eingabedatei gegeben: Zeile  $i$  kodiert die Kante mit Index  $i - 2$  (für  $i = 2, \dots, m + 1$ , wobei  $m$  die Zahl der Kanten sei). Die Kanten sind dadurch auch von 0 bis  $m - 1$  durchnummeriert. Parallele Kanten und Paare gegenläufiger Kanten können in dieser Aufgabe vorkommen.

Sie können voraussetzen, dass es mindestens 2 Knoten gibt. Der Knoten  $s$  hat dabei Nummer 0 und der Knoten  $t$  Nummer 1.

**Ausgabeformat:** Das Programm muss in der ersten Zeile der Ausgabe den Wert eines maximalen  $s$ - $t$ -Flusses ausgeben. Die weiteren Zeilen müssen jeweils genau einen Index einer Kante und den zugehörigen Flusswert enthalten. Es werden dabei nur die Kanten mit positivem Fluss ausgegeben, und die Zeilen sollen nach dem Kantenindex aufsteigend sortiert sein.

**Beispiel:** Eine Eingabedatei für einen Graphen mit fünf Knoten und sechs Kanten kann so aussehen:

```
5
0 1 2
2 1 2
2 3 2
3 1 1
3 4 2
0 2 3
```

Die Ausgabe des Programms muss dann so aussehen:

```
5
0 2
1 2
2 1
3 1
5 3
```

**Abgabe:** Der Quelltext des Programms muss bis **12. Dezember, 16:15 Uhr** per E-Mail beim jeweiligen Tutor eingegangen sein. Außerdem ist bis zu diesem Zeitpunkt ein Ausdruck des Quelltextes zusammen mit den Theorieaufgaben abzugeben.

Testinstanzen befinden sich auf der Seite

[http://www.or.uni-bonn.de/lectures/ws17/edm\\_uebung\\_ws17.html](http://www.or.uni-bonn.de/lectures/ws17/edm_uebung_ws17.html)

Sollten weitere Hinweise zu der Programmierübung notwendig sein, werden diese ebenfalls auf dieser Homepage bekanntgegeben.