Wintersemester 2017/18
Prof. Dr. J. Vygen
Dr. U. Brenner

Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Universität Bonn

Einführung in die Diskrete Mathematik
6. Übung

1. Sei G ein gerichteter oder ungerichteter Graph. Wir bezeichnen für zwei Knoten $s, t \in V(G)$ mit λ_{st} die maximale Anzahl paarweise kantendisjunkter s-t-Wege in G. Seien nun $x, y, z \in V(G)$ drei verschiedene Knoten und $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$ mit $\alpha \leq \lambda_{xy}$, $\beta \leq \lambda_{xz}$ und $\alpha + \beta \leq \max\{\lambda_{xy}, \lambda_{xz}\}$. Zeigen Sie, dass es dann α x-y-Wege und β x-z-Wege gibt, so dass diese $\alpha + \beta$ Wege paarweise kantendisjunkt sind. (3 Punkte)

2. Eine Fluglinie will p Flüge auf unterschiedlichen Strecken mit möglichst wenigen Flugzeugen durchführen. Alle verwendeten Flugzeuge sollen dabei vom selben vorgegebenen Typ sein. Für jeden Flug sei der Abflugzeitpunkt a_i festgelegt und seine Flugdauer t_i bekannt ($i = 1, \ldots, p$). Ein Flugzeug benötigt r_{ij} Stunden, um nach der Landung am Zielpunkt von Flug i den Startpunkt von Flug j zu erreichen und dort einsatzbereit zu sein ($i, j = 1, \ldots, p$). Wie kann man effizient eine optimale Lösung für dieses Problem finden? (4 Punkte)

3. Zeigen Sie, wie man einen blockierenden Fluss in einem azyklischen Netzwerk mit n Knoten und m Kanten in $O(mn)$-Zeit findet, indem man schrittweise entlang eines aus nichtsaturierten Kanten bestehenden Weges, den man mit Tiefensuche berechnet, augmentiert. Zeigen Sie auch, wie man eine $O(m)$-Laufzeit erreichen kann, wenn alle nicht mit s oder t inzidenten Kanten Kapazität 1 haben. (3 Punkte)

4. Zeigen Sie, dass der Wert eines blockierenden s-t-Flusses in einem Netzwerk (G, u, s, t) mit azyklischem gerichtetem Graphen G höchstens um den Faktor $|V(G)|$ kleiner ist als der Wert eines maximalen Flusses. Zeigen Sie außerdem, dass diese Schranke bis auf einen konstanten Faktor bestmöglich ist. (4 Punkte)

Abgabe: Dienstag, den 28.11.2017, vor der Vorlesung.