Wintersemester 2017/18
Prof. Dr. J. Vygen
Dr. U. Brenner

Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Universität Bonn

# Einführung in die Diskrete Mathematik
## 4. Übung

1. Betrachten Sie folgenden Algorithmus, um in einem gegebenen Digraphen $G$ mit Gewichten $l : E(G) \to \mathbb{R}_+$ zu einem Knoten $r \in V(G)$, von dem aus jeder Knoten in $G$ erreichbar ist, eine aufspannende $r$-Arboreszenz $T$ mit minimalem Gewicht $\sum_{e \in E(T)} l(e)$ zu bestimmen: Es sei $G_0 := (V(G), \{e \in E(G) \mid l(e) = 0\})$. Wenn $G_0$ eine aufspannende $r$-Arboreszenz enthält, gibt man eine solche zurück. Andernfalls wählt man eine starke Zusammenhangskomponente $K$ von $G_0$ mit $r \notin V(K)$ und $l(e) > 0$ für alle $e \in \delta_G^-(V(K))$. Überlegen Sie sich, warum eine solche existiert. Es sei $\alpha := \min\{l(e) \mid e \in \delta_G^-(V(K))\}$. Setze nun $l'(e) := l(e) - \alpha$ für $e \in \delta_G^-(V(K))$ und $l'(e) := l(e)$ für $e \in E(G) \setminus \delta_G^-(V(K))$. Dann berechnet man rekursiv eine kostenminimale aufspannende $r$-Arboreszenz $T$ bezüglich $l'$. Zeigen Sie, dass $T$ so gewählt werden kann, dass $|\delta_T^-(V(K))| = 1$ gilt. Diese Arboreszenz $T$ gibt man dann zurück.

   Beweisen Sie, dass dieser Algorithmus korrekt funktioniert. (4 Punkte)

2. Sei $G$ ein gerichteter Graph mit Kantengewichten $c : E(G) \to \mathbb{R}_+$. Seien $s, t \in V(G)$, $L \subseteq V(G)$, $L \neq \emptyset$, so dass von jedem Knoten aus jedes Element von $L$ erreichbar ist, und $\pi(v) := \min\left\{0, \min_{l \in L}\left(\mathrm{dist}_{(G,c)}(t,l) - \mathrm{dist}_{(G,c)}(v,l)\right)\right\}$ für $v \in V(G)$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

   (a) $\pi$ ist ein zulässiges Potential in $(G, c)$.

   (b) Jeder kürzeste $s$-$t$-Weg in $(G, c_\pi)$ ist ein kürzester $s$-$t$-Weg in $(G, c)$.

   (c) $\left\{v \in V(G) \mid \mathrm{dist}_{(G,c_\pi)}(s,v) < \mathrm{dist}_{(G,c_\pi)}(s,t)\right\} \subseteq \left\{v \in V(G) \mid \mathrm{dist}_{(G,c)}(s,v) < \mathrm{dist}_{(G,c)}(s,t)\right\}$.

   (2+1+2 Punkte)

   Bemerkung: Wenn man eine große Anzahl von Kürzeste-Wege-Berechnungen im selben Graphen aber mit unterschiedlichen Start- und Endknoten durchführen muss, kann es sich lohnen, vorher Abstände zu einer gewissen Menge $L$ von Knoten zu berechnen, die als Orientierungspunkte dienen. Unter Ausnutzung der obigen Eigenschaften kann man damit die Aufrufe von Dijkstras Algorithmus in der Praxis beschleunigen.

3. Betrachten Sie die folgende Variante des Moore-Bellman-Ford-Algorithmus: Nummeriere die Knoten des gegebenen Graphen $G$ in einer beliebigen Reihenfolge, es sei also $V(G) = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Betrachte nun in jeder Iteration die Kanten in folgender Reihenfolge: Durchlaufe die Knoten von $v_1$ nach $v_n$ und betrachte für jeden dabei besuchten Knoten $v_i$ alle Kanten $(v_i, v_j) \in E(G)$ mit $i < j$, um $l(v_j)$ neu zu setzen. Durchlaufe anschließend alle Knoten von $v_n$ nach $v_1$ und betrachte für jeden dabei besuchten Knoten $v_i$ alle Kanten $(v_i, v_j) \in E(G)$ mit $j < i$, um $l(v_j)$ gegebenenfalls neu zu setzen. Zeigen Sie, dass, wenn man in jeder Iteration alle Kanten in dieser Reihenfolge betrachtet, $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ Iterationen ausreichend sind. (3 Punkte)

4. Sei $G$ ein azyklischer gerichteter Graph mit $n$ Knoten. Entfernt man aus $G$ nacheinander alle Kanten $(v, w)$, für die es einen $v$-$w$-Weg gibt, der aus mehr als einer Kante besteht, so nennt man das Ergebnis die transitive Reduktion von $G$. Zeigen Sie, dass diese nicht von der Reihenfolge abhängt. Wie kann man in Zeit $O(n^3)$ die transitive Reduktion eines azyklischen Digraphen berechnen? (4 Punkte)

   Hinweis: Modifizieren Sie den FLOYD-WARSHALL-ALGORITHMUS.

5. Zeigen Sie, dass es für jedes $\varepsilon > 0$ und jedes $\delta < 1 + \frac{2}{\varepsilon}$ einen ungerichteten Graph $G$ mit Kantengewichten $c : E(G) \to \mathbb{R}_+$ sowie einen Knoten $s \in V(G)$ gibt, so dass jeder aufspannende Baum $T$ in $G$, der $\mathrm{dist}_{(T,c)}(s, v) \leq (1+\varepsilon)\mathrm{dist}_{(G,c)}(s, v)$ für alle $v \in V(G)$ erfüllt, Kosten hat, die mindestens um den Faktor $\delta$ größer sind als die Kosten eines kostenminimalen aufspannenden Baumes. (4 Punkte)

Abgabe: Dienstag, den 14.11.2017, vor der Vorlesung.