Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Universität Bonn

Lineare und Ganzzahlige Optimierung
14. Übung

1. Es sei $A \in \{0,1\}^{m\times n}$, sodass die Einsen in jeder Spalte direkt untereinander stehen, d.h. für jede Spalte $j \in \{1,\dots,n\}$ gibt es $i_1^j, i_2^j \in \{1,\dots,m\}$ mit:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & i_1^j \le i \le i_2^j \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

für $j \in \{1,\dots,n\}$ und $i \in \{1,\dots,m\}$ (falls $i_1^j > i_2^j$, dann besteht die Spalte nur aus Nullen). Zeigen Sie, A ist vollständig unimodular ist.

Lösungshinweis: Nach einem Satz aus der Vorlesung reicht es zu zeigen, dass es für jede Menge $R \subseteq \{1,\dots,m\}$ eine Aufteilung $R = R_1 \dot\cup R_2$ gibt, so dass $\sum_{i\in R_1} a_i - \sum_{i\in R_2} a_i \in \{-1,0,1\}^n$ (wobei wir die Zeilen von A mit a_i $(i = 1,\dots,m)$ bezeichnen). Das ist immer möglich: für $R = \{i_1,\dots,i_k\} \subseteq \{1,\dots,m\}$ mit $i_1 < i_2 < \dots < i_k$ setze $R_1 = \{i_j \mid j \in \{1,\dots,k\}, j \text{ ungerade}\}$ und $R_2 = R \setminus R_1$. Man überprüft leicht, dass R_1 und R_2 die gewünschten Eigenschaften haben.

2. Zeigen Sie, dass $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ nicht vollständig unimodular ist, aber $\{x \in \mathbb{R}^3 \mid Ax = b\}$ für alle ganzzahligen Vektoren b ganzzahlig ist.

Lösungshinweis: Die 2×2-Teilmatrix $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ links oben hat Determinante 2, also kann die Matrix nicht vollständig unimodular sein. Eine Lösung $x = (x_1,x_2,x_3)$ zu einem ganzzahligen Vektor $b = (b_1,b_2,b_3)$ ergibt sich als $x_1 = b_3$, $x_2 = b_2 + x_1$ und $x_3 = b_3 - x_1 - x_2$, ist also ganzzahlig.

3. Betrachten Sie folgendes Problem: Es seien ein gerichteter Graph G und Knoten $s,t \in V(G)$ mit $s \ne t$ gegeben. Außerdem seien ganzzahlige Abbildungen $l,u : E(G) \to \mathbb{Z}$ gegeben, sodass $l(e) \le u(e)$ für alle $e \in E(G)$ gilt. Die Aufgabe besteht darin, eine Abbildung $f : E(G) \to \mathbb{R}$ mit $l(e) \le f(e) \le u(e)$ für alle Kanten $e \in E(G)$ und $\sum_{e\in\delta_G^-(v)} f(e) = \sum_{e\in\delta_G^+(v)} f(e)$ für alle $v \in V(G)\setminus\{s,t\}$ zu finden, so dass $\sum_{e\in\delta_G^+(s)} f(e) - \sum_{e\in\delta_G^-(s)} f(e)$ maximiert wird. Dieses Problem ist also eine Verallgemeinerung des Max-Flow-Problems. Zeigen Sie, dass es stets ein ganzzahlige Optimallösung gibt, und zeigen Sie, dass der Wert einer Optimallösung gleich

$$\min\left\{ \sum_{e\in\delta_G^+(X)} u(e) - \sum_{e\in\delta_G^-(X)} l(e) \mid X \subseteq V(G)\setminus\{t\}, s \in X \right\}$$

ist.

Lösungshinweis: Die Ganzzahligkeit folgt einfach aus dem Ergebnis aus der Vorlesung, dass die Inzidenzmatrix eines gerichteten Graphen vollständig unimodular ist.

Die zweite Aussage kann man darüber zeigen, dass man das Problem, einen maximalen Flusswert zu finden, auf eine Min-Cost-Flow-Problem zurückführt. Positive untere Schranken $l(e)$ für den Flusswert auf einer

Kante $e = (v, w)$ simuliert man, indem man e durch eine Kante mit Kapazität $u(e) - l(e)$ ersetzt und einen Knoten x_e einfügt, der b-Wert $l(e)$ hat und mit einer Kante (x_e, w) verbunden ist. Auserdem verringert man den b-Wert von v um $l(e)$. Negative untere Schranken $l(e)$ kann man einfach durch Rückwärtskanten mit Kapazität $-l(e)$ modellieren. Dann ergibt sich die Aussage aus dem Zulässigkeitekriterium für b-Flüsse.

Man kann aber auch das Problem dualisieren und benutzen, dass das primale und das duale ganzzahlige Optimallösungen haben (siehe Seite 274 f. von A. Schrijver: *Theory of Linear and Integer Programming*, 1986, Wiley für Details).

4. Benutzen Sie die vorige Übung, um den Satz von Dilworth zu zeigen: in jeder Halbordnung $(X, \leq)$ ist die maximale Größe einer Antikette (= Menge von paarweise nicht-vergleichbaren Elementen) gleich der minimalen Anzahl von Ketten (= Mengen von paarweise vergleichbaren Elementen), die man braucht, um X zu überdecken.

   Lösungshinweis: Siehe Seite 275 von A. Schrijver: *Theory of Linear and Integer Programming*, 1986, Wiley.

5. (a) Geben Sie ein Beispiel für ein Polyeder P an, sodass $P_I \neq P^{(i)}$ für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt.

   (b) Zeigen Sie, dass es für jedes $k \in \mathbb{N}$ ein rationales Polyeder gibt, so dass $P_I \neq P^{(i)}$ für alle $i \in \{1, \ldots, k\}$ gilt.

   Lösungshinweis:

   (a) Da $P^{(i)}$ abgeschlossen ist, funktioniert hier jedes Polyeder P für das $P_I \neq \emptyset$ nicht abgeschlossen ist (siehe Aufgabe 1 c) von Zettel 12).

   (b) Für $P = \operatorname{conv}\{(0,0), (0,1), (k, \frac{1}{2})\}$ sieht man leicht, dass $P^{(i)} \neq P_I$ für alle $i < 2k$ gilt.

Dieser Zettel wird nicht mehr abgegeben. Lösungshinweise werden ab dem 9.2.2017 auf der Übungsseite stehen