Wintersemester 2016/17 — Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Dr. U. Brenner — Universität Bonn

Lineare und Ganzzahlige Optimierung
14. Übung

1. Es sei $A \in \{0,1\}^{m\times n}$, sodass die Einsen in jeder Spalte direkt untereinander stehen, d.h. für jede Spalte $j \in \{1,\dots,n\}$ gibt es $i_1^j, i_2^j \in \{1,\dots,m\}$ mit:
$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & i_1^j \le i \le i_2^j \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$
für $j \in \{1,\dots,n\}$ und $i \in \{1,\dots,m\}$ (falls $i_1^j > i_2^j$, dann besteht die Spalte nur aus Nullen). Zeigen Sie, A ist vollständig unimodular ist.

2. Zeigen Sie, dass $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ nicht vollständig unimodular ist, aber $\{x \in \mathbb{R}^3 \mid Ax = b\}$ für alle ganzzahligen Vektoren b ganzzahlig ist.

3. Betrachten Sie folgendes Problem: Es seien ein gerichteter Graph G und Knoten $s,t \in V(G)$ mit $s \neq t$ gegeben. Außerdem seien ganzzahlige Abbildungen $l,u : E(G) \to \mathbb{Z}$ gegeben, sodass $l(e) \le u(e)$ für alle $e \in E(G)$ gilt. Die Aufgabe besteht darin, eine Abbildung $f : E(G) \to \mathbb{R}$ mit $l(e) \le f(e) \le u(e)$ für alle Kanten $e \in E(G)$ und $\sum_{e\in\delta_G^-(v)} f(e) = \sum_{e\in\delta_G^+(v)} f(e)$ für alle $v \in V(G) \setminus \{s,t\}$ zu finden, so dass $\sum_{e\in\delta_G^+(s)} f(e) - \sum_{e\in\delta_G^-(s)} f(e)$ maximiert wird. Dieses Problem ist also eine Verallgemeinerung des Max-Flow-Problems. Zeigen Sie, dass es stets ein ganzzahlige Optimallösung gibt, und zeigen Sie, dass der Wert einer Optimallösung gleich
$$\min\left\{ \sum_{e\in\delta_G^+(X)} u(e) - \sum_{e\in\delta_G^-(X)} l(e) \mid X \subseteq V(G)\setminus\{t\}, s \in X \right\}$$
ist.

4. Benutzen Sie die vorige Übung, um den Satz von Dilworth zu zeigen: in jeder Halbordnung $(X,\le)$ ist die maximale Größe einer Antikette (= Menge von paarweise nicht-vergleichbaren Elementen) gleich der minimalen Anzahl von Ketten (= Mengen von paarweise vergleichbaren Elementen), die man braucht, um X zu überdecken.

5. (a) Geben Sie ein Beispiel für ein Polyeder P an, sodass $P_I \neq P^{(i)}$ für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt.
   (b) Zeigen Sie, dass es für jedes $k \in \mathbb{N}$ ein rationales Polyeder gibt, so dass $P_I \neq P^{(i)}$ für alle $i \in \{1,\dots,k\}$ gilt.

Dieser Zettel wird nicht mehr abgegeben. Lösungshinweise werden ab dem 9.2.2017 auf der Übungsseite stehen