Wintersemester 2016/17 Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Dr. U. Brenner Universität Bonn

Lineare und Ganzzahlige Optimierung
13. Übung

1. Nehmen Sie an, dass Sie einen Polynomzeit-Algorithmus $\mathcal{A}$ gegeben haben, der für jedes zulässige und beschränkte rationale lineare Programm eine Optimallösung bestimmt. Benutzen Sie $\mathcal{A}$, um in polynomieller Zeit eine Optimallösung von $\max\{c^t x \mid x \in P \cap \mathbb{Z}^n\}$ zu bestimmen, wobei P ein nicht-leeres rationales Polyeder mit $P = P_I$ sei, für welches das Maximum beschränkt ist. (5 Punkte)

2. Es sei $a = (a_1, \dots, a_n) \in (\mathbb{N} \setminus \{0\})^n$ ein Vektor und β eine rationale Zahl. Zeigen Sie, dass $a^t x \leq \beta$ genau dann TDI ist, wenn der größte gemeinsame Teiler von $a_1, \dots, a_n$ gleich 1 ist. (4 Punkte)

3. (a) Zeigen Sie, dass ein ganzzahliges TDI-System $Ax \leq b$ genau dann minimal TDI ist, wenn jede Ungleichung in $Ax \leq b$ eine Stützhyperebene von $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ definiert und nicht als ganzzahlige nicht-negative Kombination von anderen Ungleichungen in $Ax \leq b$ geschrieben werden kann.
   (b) Beweisen oder widerlegen Sie die folgende Aussage: Wenn $Ax \leq b$ (mit $A \in \mathbb{Q}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{Q}^m$) ein TDI-System ist und $\alpha \in \mathbb{Q}_{>0}$, dann ist $\alpha A x \leq \alpha b$ ein TDI-System. (4+2 Punkte)

4. Es sei $C \neq \emptyset$ ein rationaler spitzer polyedrischer Kegel. Zeigen Sie, dass es dann eine eindeutig bestimmte inklusionsminimale ganzzahlige Hilbert-Basis gibt, die C erzeugt. (5 Punkte)
   Hinweis: Betrachten Sie die ganzzahligen Vektoren C, die nicht als Summe von zwei ganzzahligen Vektoren in C geschrieben werden können.

Abgabe: Dienstag, 31. Januar, 2017, vor der Vorlesung.