Lineare und Ganzzahlige Optimierung
12. Übung

1. Geben Sie je ein Beispiel an für

   (a) ein volldimensionales unbeschränktes rationales Polyeder P, für das P_I leer ist.

   (b) ein unbeschränktes Polyeder P, für das P_I nicht-leer und beschränkt ist.

   (c) ein Polyeder P, für das $P_I \neq \emptyset$ nicht abgeschlossen ist.

   (d) ein zulässiges und beschränktes ganzzahliges lineares Programm, das keine Optimallösung hat. (2+2+2+2 Punkte)

2. Sei $P = \{x \in \mathbb{R}^{k+l} : Ax \leq b\}$ ein rationales Polyeder (d.h. $A \in \mathbb{Q}^{m \times (k+l)}$, $b \in \mathbb{Q}^m$). Zeigen Sie, dass $\operatorname{conv}(P \cap (\mathbb{Z}^k \times \mathbb{R}^l))$ ein rationales Polyeder ist. (4 Punkte)

3. Zeigen Sie, das ein nichtleerer polyedrischer Kegel C genau dann spitz ist, wenn es einen Vektor b gibt, so dass $b^t x > 0$ für alle $x \in C \setminus \{0\}$ gilt. (3 Punkte)

4. Betrachten Sie das CAPACITATED FACILITY LOCATION PROBLEM: Gegeben seien eine Menge C von Kunden und eine Menge F von möglichen Facility-Positionen, eine Metrik ℓ auf $C \cup F$, die die Anschlusskosten angibt, Facility-Eröffnungskosten $p : F \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, Kapazitäten $c : F \to \mathbb{N}$ und Nachfragen $d : C \to \mathbb{N}$. Gesucht ist eine Menge $I \subseteq F$ von Facilities, die eröffnet werden, und eine Zuordnung $f : C \to I$, so dass die Kapazitäten der Facilities nicht überschritten werden, d.h. $\sum_{c \in f^{-1}(x)} d(c) \leq c(x) \quad \forall x \in I$. Dabei soll die Summe der Eröffnungskosten und der Anschlusskosten der Kunden zu den ihnen zugeordneten Facilities minimiert werden.

   (a) Modellieren Sie dieses Problem als ganzzahliges lineares Programm.

   (b) Geben Sie ein nicht-triviales Beispiel für eine Instanz an, für welche die LP-Relaxierung des ganzzahligen LP eine eindeutige Lösung hat, die ganzzahlig ist. Geben Sie außerdem ein Beispiel für eine Instanz an, für die jede Optimallösung der LP-Relaxierung fraktional ist. (3+2 Punkte)

Abgabe: Dienstag, 24. Januar, 2017, vor der Vorlesung.