Lineare und Ganzzahlige Optimierung
9. Übung

1. Sei $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ s & -1 \end{pmatrix}$ und $b := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

   Benutzen Sie den IDEALISIERTEN ELLIPSOID-ALGORITHMUS mit $R = 2$, um einen Vektor in $P = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid Ax \leq b\}$ für $s = -1$ bzw. $s = -2$ zu berechnen. (4 Punkte)

2. Ein semidefinites Programm ist ein Optimierungsproblem

$$\begin{aligned} \min\ & C \star X \\ & A_i \star X \leq b_i \qquad\qquad \forall i = 1, \dots, m \\ & X \succeq 0 \\ & X \in \mathbb{R}^{n \times n} \end{aligned}$$

   wobei $C, A_1, \dots, A_n$ Matrizen sind, $A \star X := \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij} x_{ij}$ und $X \succeq 0$ heißt, dass X positiv semidefinit (und damit auch symmetrisch) ist.

   (a) Zeigen Sie, dass die Menge $\{X \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid X \succeq 0\}$ ein abgeschlossener Kegel ist.

   (b) Geben Sie ein Separationsorakel mit polynomieller Laufzeit für die Lösungsmenge an. (Sie können annehmen, dass Sie arithmetische Standard-Operationen auf reellen Zahlen, einschließlich der Berechnung von Quadratwurzeln, exakt und in konstanter Zeit durchführen können.) (3+4 Punkte)

3. Betrachten Sie das folgende Optimierungsproblem:

$$\begin{aligned} \min\ & \frac{(c^t x)^2}{d^t x} \\ \text{s.d.}\ & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

   wobei $c, d \in \mathbb{R}^n$, $A \in R^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$ gegeben sind, so dass $d^t x > 0$ für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ mit $Ax \geq b$ und $x \geq 0$. Zeigen Sie, dass dieses Problem als semidefinites Programm geschrieben werden kann (siehe vorige Übung). (5 Punkte)

4. Sei $P \subset \mathbb{R}^d$ eine endliche Menge von Punkten und sei B eine Kugel, die P enthält. Zeigen Sie: B hat genau dann unter allen Kugeln, die P enthalten, kleinsten Radius, wenn der Mittelpunkt von B in $\operatorname{conv}(P \cap \partial B)$ liegt, wobei ∂B der Rand der Kugel sei. (4 Punkte)

Abgabe: Dienstag, 20. Dezember, 2016, vor der Vorlesung.