Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Universität Bonn

Lineare und Ganzzahlige Optimierung
8. Übung

1. Es sei $A \in \mathbb{Q}^{n\times n}$ eine reguläre Matrix. Zeigen Sie, dass $\mathrm{size}(A^{-1}) \leq 4n^2\mathrm{size}(A)$ gilt. (3 Punkte)

2. Wir definieren $\|A\| := \max_{\|x\|=1} \|Ax\|$ für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, wobei $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ die gewöhnliche Euklidische Norm ist. Zeigen Sie:
   (a) $\|A\|$ ist eine Norm.
   (b) $\|aa^T\| = a^T a$
   (c) $\|A\| = \max\{x^T Ax \mid \|x\| = 1\}$ falls A positiv semidefinit ist
   (d) $\|A\| \leq \|A + B\|$ falls A und B positiv semidefinit sind. (2+2+2+2 Punkte)

3. Zeigen Sie $|\det(A)| \leq \prod_{i=1}^n \|a_i\|$ für eine $n\times n$-Matrix A mit Spalten $a_1, \ldots, a_n$ (wobei $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ wieder die gewöhnliche Euklidische Norm ist). (3 Punkte)

4. Im Job-Zuteilungsproblem müssen n Jobs mit Bearbeitungszeiten $t_1, ..., t_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ von m Arbeitern ausgeführt werden. Für jeden Job i gibt es eine Menge $S_i \subseteq \{1, ..., m\}$ von Arbeitern, die in der Lage sind, den Job i auszuführen. Mehrere Arbeiter können parallel am gleichen Job tätig sein, um die Ausführung dieses Jobs zu beschleunigen, aber jeder Arbeiter kann zu jeder Zeit nur einen Job ausführen.
   (a) Formulieren Sie ein lineares Programm, mit dem die gesamte Produktionsdauer für alle Jobs minimiert werden kann (also die Zeit bis zu dem Zeitpunkt, wenn der letzte Arbeiter fertig ist).
   (b) Dualisieren Sie das LP. (3+3 Punkte)

Abgabe: Dienstag, 13. Dezember, 2016, vor der Vorlesung.