Lineare und Ganzzahlige Optimierung
6. Übung

1. Verwenden Sie den Simplex-Algorithmus, um die folgenden linearen Programme zu lösen:

   (a)

$$\begin{aligned} & \max\ 2x_2 \\ \text{s.d.}\quad & x_1 - x_2 \leq 4 \\ & -x_1 + x_2 \leq 1 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

   (b)

$$\begin{aligned} & \max\ 5x_1 + 3x_2 \\ \text{s.d.}\quad & 4x_1 + 2x_2 \leq 12 \\ & 4x_1 + x_2 \leq 10 \\ & x_1 + x_2 \leq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

   (c)

$$\begin{aligned} & \min\ 5x_1 - x_2 \\ \text{s.d.}\quad & x_1 - 3x_2 \leq 1 \\ & x_1 - 4x_2 \leq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

   (d)

$$\begin{aligned} & \min\ -x_1 - 2x_2 \\ \text{s.d.}\quad & 2x_1 + x_2 \leq 5 \\ & -x_1 - x_2 \geq -3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

   Notieren Sie alle zwischenzeitlich auftretenden Simplex-Tableaus, und beschreiben Sie, warum Sie eine bestimmte Variable auswählen können, welche die Basis betritt bzw. verlässt. Wenn es eine Optimallösung gibt, geben Sie auch den Wert einer solchen an. (2+2+2+2 Punkte)

2. Betrachten Sie (für $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ und $c \in \mathbb{R}^n$) das lineare Programm (P)

$$\begin{array}{rrcl} \max c^t x & & & \\ \text{s.d.} & Ax & \leq & b \end{array}$$

Es sei $\tilde{x}$ eine optimale Basislösung von $Ax \leq b$, d.h. es gelte $A\tilde{x} \leq b$ und es gebe ein Teilsystem $A'x \leq b'$ mit $A'\tilde{x} = b'$, so dass A' aus n linear unabhängigen Zeilen von A besteht. Zusätzlich sei $\tilde{x}$ nicht-degeneriert, d.h. für alle Bedingungen $a^t x \leq \beta$ in $Ax \leq b$ aber nicht in $A'x \leq b'$ gelte $a^t\tilde{x} < \beta$. Es sei $\delta = c^t\tilde{x}$. Außerdem sei $\tilde{y} = (\tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_m)$ eine Optimallösung des dualen LPs. Zeigen Sie, dass es dann ein $\epsilon > 0$ gibt, so dass für jeden Vektor $t = (p_1, \ldots, p_m)$ mit $p_i \in [0, \epsilon]$ $(i = 1, \ldots, m)$ das modifizierte lineare Programm (P')

$$\begin{array}{rrcl} \max c^t x & & & \\ \text{s.t.} & Ax & \leq & b + p \end{array}$$

eine Optimallösung mit Wert $\delta + \tilde{y}^t p$ hat. (4 Punkte)

Bemerkung: Diese Ergebnis ist der Grund, warum die dualen Variablen auch Schattenpreise genannt werden. Der Wert von $\tilde{y}_i$ gibt an, wie viel man im dualen LP gewinnen kann, wenn die rechte Seite von $a_i^t x \leq b_i$ etwas vergrößert wird. Betrachtet man b_i als Schranke für eine verfügbare Ressource, dann gibt $\tilde{y}_i$ also umgekehrt den Preis an, den man für diese Ressource bezahlen würde.

3. Betrachten Sie ein lineares Programm $\max\{c^t x \mid Ax = b, x \geq 0\}$. Es sei B eine zulässige Basis mit Basislösung x^* und reduzierten-Kosten-Vektor $r \leq 0$ (also ist x^* eine Optimallösung). Sei $I = \{j \in N \mid r_j = 0\}$.
   (a) Beweisen Sie, das x^* die einzige Optimallösung ist, falls $I = \emptyset$.
   (b) Nehmen Sie an, dass $I \neq \emptyset$. Beweisen Sie, dass in dem Fall x^* genau dann die einzige Optimallösung ist, wenn das folgende lineare Programm eine Optimallösung mit Wert 0 hat:

$$\begin{array}{rrcll} \max & \sum_{i\in I} x_i & & & \\ \text{s.t.} & Ax & = & b & \\ & x_i & = & 0 & \text{für } i \in N \setminus I \\ & x_i & \geq & 0 & \text{for } i \in B \cup I \end{array}$$

(4 Punkte)

4. Betrachten Sie ein LP in geeigneter Form für das Simplex-Verfahren, also $\max\{c^t x \mid Ax = b, x \geq 0\}$, so dass A vollen Zeilenrang hat und $Ax = b$ lösbar ist. Beweisen oder widerlegen Sie:
   (a) Eine Variable, die beim Simplex gerade in die Basis gekommen ist, kann die Basis in der nächsten Iteration wieder verlassen.
   (b) Eine Variable, die beim Simplex gerade die Basis verlassen hat, kann in der nächsten Iteration wieder in die Basis kommen.
   (c) Ist x eine eindeutige optimale Basislösung und $\tilde{x}$ eine zweitbeste Basislösung mit echt kleineren Kosten, so erhält man x aus $\tilde{x}$ durch Austausch einer Basisvariablen.
   (d) Falls keine Basislösung degeneriert ist und das LP beschränkt ist, so ist eine optimale Lösung eindeutig. (1+1+1+1 Punkte)

Abgabe: Dienstag, 29. November, 2016, vor der Vorlesung.