Wintersemester 2016/17 | Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Dr. U. Brenner | Universität Bonn

Lineare und Ganzzahlige Optimierung
5. Übung

1. Für $X \subseteq \mathbb{R}^n$ sei $X^* := \{y \in \mathbb{R}^n \mid y^t x \leq 1 \text{ für alle } x \in X\}$ und $X^o := \{y \in \mathbb{R}^n \mid y^t x \leq 0 \text{ für alle } x \in X\}$. Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in (\mathbb{R}_{\geq 0})^m$, $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ und $C = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq 0\}$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:
   (a) P^* ist ein Polyeder.
   (b) $(P^*)^* = P$.
   (c) P hat genau dann Dimension n, wenn P^* spitz ist.
   (d) 0 ist genau dann ein innerer Punkt von P, wenn P^* beschränkt ist.
   (e) $C^0 = C^*$.
   (f) C^0 ist der von den Zeilen von A erzeugte Kegel. (2+2+1+1+1+2 Punkte)

2. Für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und $X \subseteq \mathbb{R}$ sei

$$M_X = \left\{ A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}} \mid a_{i_0 j_0} \in X, \sum_{i=1}^{n} a_{ij_0} = 1, \sum_{j=1}^{n} a_{i_0 j} = 1 \quad (\text{für } i_0, j_0 \in \{1,\dots,n\}) \right\}.$$

   Zeigen Sie, dass eine $n \times n$-Matrix A genau dann in $M_{\mathbb{R}_{\geq 0}}$ ist, wenn sie eine Konvexkombination von Matrizen in $M_{\{0,1\}}$ ist. (4 Punkte)

3. Zwei Mengen $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$ heißen *strikt separierbar*, wenn es eine Hyperebene $\{x \in \mathbb{R}^n \mid a^t x = b\}$ gibt, so dass $a^t x < b$ für alle $x \in X$ und $a^t y > b$ für alle $y \in Y$. Beweisen oder widerlegen Sie die folgende Aussage: Je zwei disjunkte abgeschlossene konvexe Mengen sind strikt separierbar. (3 Punkte)

4. Zeigen Sie, dass für zwei Polyeder $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$ auch $X + Y$ ein Polyeder ist. (4 Punkte)

Abgabe: Dienstag, 22. November, 2016, vor der Vorlesung.