Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Universität Bonn

Lineare und Ganzzahlige Optimierung
2. Übung

1. (a) Beweisen Sie, dass jede Menge $X \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $|X| > n+1$ in zwei Mengen X_1 und X_2 aufgeteilt werden kann, so dass $\mathrm{conv}(X_1) \cap \mathrm{conv}(X_2) \neq \emptyset$ gilt.

   (b) Es seien $A_1, \dots, A_m \subseteq R^n$ konvexe Mengen. Für jede Menge $I \subseteq \{1, \dots, m\}$ mit $|I| \leq n+1$ sei
$$\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$$
   Zeigen Sie, dass dann gilt:
$$\bigcap_{i=1}^{m} A_i \neq \emptyset$$
(4+4 Punkte)

   Hinweis zu Teil (b): Verwenden Sie Induktion in m (beginnend mit $m = n+2$) und benutzen Sie Teil (a).

2. (a) Zeigen Sie, dass $\mathrm{conv}(X)$ für jede Menge $X \subseteq \mathbb{R}^n$ die kleinste konvexe Menge ist, die X enthält.

   (b) Es seien $P, Q \subseteq \mathbb{R}^n$ zwei Polyeder. Ist dann $\mathrm{conv}(P \cup Q)$ notwendigerweise ein Polyeder? Beweise Sie die Korrektheit Ihrer Antwort. (3+3 Punkte)

3. Es sei (P) ein lineares Programm in Standard-Ungleichungsform, also in der Form $\min\{c^t x \mid Ax \leq b\}$. Zeigen Sie, dass das duale LP des dualen LPs von (P) äquivalent zu (P) ist. (2 Punkte)

4. Es sei $A \in \mathbb{R}^{m \times (n+k)}$ und $b \in \mathbb{R}^m$. Zeigen Sie, dass
$$P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists y \in \mathbb{R}^k : A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \leq b\}$$
   ein Polyeder ist. (4 Punkte)

Abgabe: Donnerstag, 3. November, 2016, vor der Vorlesung.