Wintersemester 2016/17
Prof. Dr. S. Held
Dr. U. Brenner

Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Universität Bonn

Einführung in die Diskrete Mathematik
11. Übung

1. Schreiben Sie eine 2-Band-Turingmaschine, die zwei positive ganze Zahlen, die als Binärstrings ohne führende Nullen gegeben sind, addiert. Die Darstellungen der Zahlen sollen durch das Zeichen "#" getrennt sein. (5 Punkte)

2. Beweisen Sie, dass folgende Entscheidungsprobleme in *NP* sind:

   (a) Gegeben seien ein zusammenhängender ungerichteter Graph G, Kantengewichte $c : E(G) \to \mathbb{Z}_+$ und eine natürliche Zahl k. Gibt es einen aufspannenden Subgraphen H von G mit $|E(H)| \leq k$ und Gewichte $c' : E(H) \to \mathbb{R}_+$, sodass

   $$\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{dist}_{(G,c)}(s,t) \leq \operatorname{dist}_{(H,c')}(s,t) \leq \sqrt{2} \operatorname{dist}_{(G,c)}(s,t)$$

   für alle $s, t \in V(G)$ gilt?

   (b) Gegeben seien eine natürliche Zahl n und natürliche Zahlen a_i, b_i für $i = 1, \ldots, n$. Kann man n Quadrate mit Kantenlängen $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \ldots, \frac{a_n}{b_n}$ achsenparallel in das Einheitsquadrat packen? Die Quadrate dürfen sich dabei berühren, aber nicht überlappen. (4+4 Punkte)

3. Man beweise: Ist $\mathcal{P} \in NP$, so gibt es ein Polynom p, sodass für $\mathcal{P}$ ein Algorithmus mit Laufzeit $O(2^{p(n)})$ existiert, wobei n die Länge der Eingabe sei. (3 Punkte)

4. (a) Man beschreibe einen Algorithmus mit linearer Laufzeit, der für jede Satisfiability-Instanz eine Wahrheitsbelegung bestimmt, die mindestens die Hälfte aller Klauseln erfüllt.

   (b) Zeigen Sie, dass 2SAT, also die Einschränkung des Satisfiability-Problems auf Instanzen, in denen jede Klausel höchstens zwei Literale hat, in polynomieller Zeit lösbar ist. (2+2 Punkte)

Abgabe: Donnerstag, den 19.1.2017, vor der Vorlesung.