Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Universität Bonn

Einführung in die Diskrete Mathematik
8. Übung

1. Man beweise den Zirkulationssatz von Hoffman: Gegeben seien ein gerichteter Graph G und untere bzw. obere Schranken $l, u : E(G) \to \mathbb{R}_+$ mit $l(e) \leq u(e)$ für alle $e \in E(G)$. Es gibt genau dann eine Abbildung $f : E(G) \to \mathbb{R}_+$ mit $l(e) \leq f(e) \leq u(e)$ für alle $e \in E(G)$ und $\sum_{e\in\delta^-(v)} f(e) = \sum_{e\in\delta^+(v)} f(e)$ für alle $v \in V(G)$, wenn
$$\sum_{e\in\delta^-(X)} l(e) \leq \sum_{e\in\delta^+(X)} u(e) \quad \text{für alle } X \subseteq V(G) \text{ gilt.}$$
(5 Punkte)

2. Sei (G, u, b, c) eine Instanz des Minimum-Cost-Flow-Problems, für das eine zulässige Lösung existiere. Zeigen Sie, dass es dann eine kostenminimale Lösung f gibt, für die eine Kantenmenge $F \subseteq E(G)$ existiert, so dass der $(V(G), F)$ zugrundeliegende ungerichtete Graph kreisfrei ist und auf allen Kanten $e \in E(G) \setminus F$ gilt: $f(e) \in \{0, u(e)\}$. (4 Punkte)

3. Wir betrachten ein Verfahren, das aus dem Sukzessive-Kürzeste-Wege-Algorithmus entsteht, indem man zwei Änderungen durchführt:
   - Man augmentiert stets um $\gamma' := \min\left\{ \min_{e\in E(P)} u_f(e), \quad \max\{b'(s), -b'(t)\}\right\}$.
   - Unter allen kürzesten s-t-Wegen im Residualgraphen wird der augmentierende P so ausgewählt, dass der zugehörige γ'-Wert maximal ist.

   Zeigen Sie, dass dieser Algorithmus ebenfalls nach höchstens $\frac{1}{2}\sum_{v\in V(G)} |b(v)|$ Augmentierungen terminiert. Zeigen Sie außerdem durch ein Beispiel, dass er mehr Augmentierungen benötigen kann als der (unveränderte) Sukzessive-Kürzeste-Wege-Algorithmus. (4 Punkte)

4. Sei (G, u, b, c) eine Instanz des Minimum-Cost-Flow-Problems. Man nennt eine Funktion $\pi : V(G) \to \mathbb{R}$ ein *optimales Potential*, falls es einen b-Fluss f in (G, u) mit minimalen Kosten gibt, so dass π ein zulässiges Potential bezüglich (G_f, c) ist.

   (a) Man beweise, dass eine Funktion $\pi : V(G) \to \mathbb{R}$ genau dann ein optimales Potential ist, wenn für jedes $X \subseteq V(G)$ die folgende Ungleichung gilt:
   $$b(X) + \sum_{e\in\delta^-(X):c_\pi(e)<0} u(e) \leq \sum_{e\in\delta^+(X):c_\pi(e)\leq 0} u(e). \qquad (*)$$

   (b) Man zeige, wie man in polynomieller Zeit für eine gegebene Funktion $\pi : V(G) \to \mathbb{R}$ entweder eine die Bedingung $(*)$ verletzende Menge X findet oder entscheidet, dass es keine solche gibt.

   (c) Zeigen Sie, wie man für ein gegebenes optimales Potential einen b-Fluss mit minimalen Kosten in $O(m + n^3)$ Zeit findet. (3+2+2 Punkte)

Abgabe: Donnerstag, den 15.12.2016, vor der Vorlesung.