Wintersemester 2016/17
Prof. Dr. S. Held
Dr. U. Brenner

Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Universität Bonn

Einführung in die Diskrete Mathematik
3. Übung

1. Betrachten Sie eine Union-Find-Struktur, in der zuerst m MakeSet-Operationen, dann u Union-Operationen, jeweils mit gegebenen Repräsentanten der beteiligten Mengen, und anschließend f Find-Operationen durchgeführt werden. Zeigen Sie, dass diese Operationen, wenn man Union-By-Rank und Wege-Komprimierung benutzt, in Zeit $O(m + u + f)$ durchgeführt werden können. (4 Punkte)

2. Betrachten Sie folgendes Problem: Gegeben seien ein ungerichteter zusammenhängender Graph G mit Kantengewichten $c : E(G) \to \mathbb{R}_{>0}$, ein Knoten $v_0 \in V(G)$ und eine Zahl $k \in \mathbb{N}$ mit $k \leq |\delta_G(v_0)|$. Gesucht ist ein aufspannender Baum von T in G, so dass v_0 in T mindestens Grad k hat, der unter allen aufspannenden Bäumen in G, in denen v_0 mindestens Grad k hat, minimales Gewicht hat. Geben Sie einen Algorithmus mit polynomieller Laufzeit an, der dieses Problem löst. (5 Punkte)

3. Sei G ein zusammenhängender ungerichteter Graph mit Kantengewichten $c : E(G) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$. Dabei seien alle Kantengewichte verschieden, also $c(e) \neq c(e')$ für alle $e, e' \in E(G)$ mit $e \neq e'$.

   (a) Zeigen Sie, dass es dann genau einen kostenminimalen Spannbaum T in G gibt.

   (b) Ein zweitbester Spannbaum sei ein Spannbaum, der von T verschieden ist und unter allen von T verschiedenen Spannbäumen kleinste Kosten hat. Zeigen Sie, dass es mehrere zweitbeste Spannbäume geben kann.

   (c) Geben Sie einen möglichst effizienten Algorithmus zur Berechnung eines zweitbesten Spannbaums zu einem gegebenen Spannbaum T an. Zeigen Sie die Korrektheit Ihres Verfahrens.

   (2+2+2 Punkte)

4. Es sei G ein ungerichteter Graph und $c : E(G) \to \mathbb{R}$. Eine Kante $e \in E(G)$ heiße *gefährlich*, wenn sie eine längste Kante auf einem Kreis in G ist. Sie heiße *nützlich*, wenn sie in keinem Kreis von G enthalten ist.

   (a) Zeigen Sie, dass jeder minimale Spannbaum von G jede nützliche Kante enthält.

   (b) Zeigen Sie, dass es für jede gefährliche Kante e einen minimalen Spannbaum von G gibt, der e nicht enthält.

   (c) Beschreiben und analysieren Sie eine effiziente Implementierung eines "umgekehrten Kruskal-Algorithmus" zur Berechnung eines minimalen Spannbaums: Durchlaufe die Kanten von G absteigend nach Gewicht sortiert. Wenn die betrachtete Kante gefährlich ist, entferne man sie. (1+1+3 Punkte)

Abgabe: Donnerstag, den 10.11.2016, vor der Vorlesung.