Wintersemester 2016/17
Professor Dr. J. Vygen
Dr. U. Brenner

Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Universität Bonn

Algorithmische Mathematik I
12. Übung

1. Es sei G ein gerichteter Graph und $c : E(G) \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass c genau dann konservativ ist, wenn es eine Abbildung $\pi : V(G) \to \mathbb{R}$ gibt, so dass für alle Kanten $e = (v, w) \in E(G)$ gilt: $\pi(v) + c(e) - \pi(w) \geq 0$. (4 Punkte)

2. Betrachten Sie die folgende Modifikation des MOORE-BELLMAN-FORD-ALGORITHMUS für gerichtete Graphen G und konservative Gewichte $c : E(G) \to \mathbb{R}$. Statt $(n-1)$-mal alle Kanten zu betrachten, wählen wir, solange es eine Kante $e = (v, w)$ mit $l(w) > l(v) + c(e)$ gibt, eine beliebige solche Kante aus und setze $l(w) \leftarrow l(v) + c(e)$ und $p(w) \leftarrow e$.

   (a) Zeigen Sie, dass dieser Algorithmus korrekt ist und nach endlich vielen Schritten terminiert.

   (b) Zeigen Sie, dass dies jedoch kein polynomieller Algorithmus ist. (3+3 Punkte)

   Hinweis zu (b): Betrachten Sie für ungerades n den Graph G mit $V(G) = \{v_0, \ldots, v_{n-1}\}$ und $E(G) = \{(v_i, v_{i+1}) \mid i = 0, \ldots, n-2\} \cup \{(v_{2i}, v_{2i+2}) \mid i = 0, \ldots, \frac{n-1}{2} - 1\}$.

3. Zu einem gegebenen Graph G wird ein Kantenzug $x_1, e_1, x_2, \ldots e_k, x_{k+1}$ gesucht, der jeden Knoten mindestens einmal enthält und für den k minimal ist. Beschreiben Sie einen Algorithmus, der dies in $O(n^2 2^n)$ Zeit leistet. (5 Punkte)

4. Sei $k \in \mathbb{N}$ eine Konstante. Zeigen Sie, dass man zu einem gegebenen ungerichteten Graphen G in polynomieller Laufzeit ein Matching M bestimmen kann, für das es keinen M-augmentierenden Weg in G gibt, der weniger als k Kanten hat. Um welchen Faktor kann ein solches Matching höchstens kleiner sein als ein kardinalitätsmaximales Matching? Zeigen Sie, dass die von Ihnen bewiesene Schranke bestmöglich ist. (5 Punkte)

Öffnungszeiten des Help Desks: Dienstags, 13 – 16 Uhr und donnerstags, 10 – 13 Uhr, jeweils in Raum N1.002, Endenicher Allee 60, Nebengebäude.

Abgabe: Montag, den 23.1.2017, **vor** der Vorlesung.