Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Universität Bonn

Einführung in die Diskrete Mathematik
12. Übung

1. Beweisen Sie, dass folgende Entscheidungsprobleme in *NP* sind:

   (a) Gegeben seien ein zusammenhängender ungerichteter Graph G, Kantengewichte $c : E(G) \to \mathbb{Z}_+$ und eine natürliche Zahl k. Gibt es einen aufspannenden Subgraphen H von G mit $|E(H)| \leq k$ und Gewichte $c' : E(H) \to \mathbb{R}_+$, so dass

   $$\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{dist}_{(G,c)}(s,t) \leq \operatorname{dist}_{(H,c')}(s,t) \leq \sqrt{2} \operatorname{dist}_{(G,c)}(s,t)$$

   für alle $s, t \in V(G)$ gilt?

   (b) Gegeben seien eine natürliche Zahl n und natürliche Zahlen a_i, b_i für $i = 1, \ldots, n$. Kann man n Quadrate mit Kantenlängen $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \ldots, \frac{a_n}{b_n}$ achsenparallel in das Einheitsquadrat packen? Die Quadrate dürfen sich dabei berühren, aber nicht überlappen.

2. (a) Betrachten Sie 3-Occurrence-Sat, d.h. Satisfiability eingeschränkt auf Instanzen, in denen jede Klausel höchstens drei Literale enthält und jede Variable in höchstens drei Klauseln vorkommt. Man beweise, dass dieses Problem *NP*-vollständig ist.

   (b) Man zeige, dass es *NP*-schwer ist zu entscheiden, ob eine gegebene Satisfiability-Instanz von der Mehrzahl aller Wahrheitsbelegungen der verwendeten Variablen erfüllt wird.

3. Betrachten Sie folgendes Problem: Finde zu einem gegebenen Graph G eine möglichst kleine Menge $X \subseteq V(G)$ mit $X \cup \Gamma(X) = V(G)$. Hier ist $\Gamma(X)$ wieder die Menge der Nachbarn von X. Man zeige, dass es für dieses Problem genau dann einen polynomiellen Algorithmus gibt, wenn $P = NP$ ist.

4. Man bestimme entweder einen polynomiellen Algorithmus für die folgenden Entscheidungsprobleme, oder man beweise ihre *NP*-Vollständigkeit:

   (a) Gibt es für einen gegebenen ungerichteten Graphen G und eine gegebene Knotenmenge $T \subseteq V(G)$ einen aufspannenden Baum in G, so dass alle Knoten in T Blätter sind?

   (b) Gibt es für einen gegebenen ungerichteten Graphen G und eine gegebene Knotenmenge $T \subseteq V(G)$ einen aufspannenden Baum in G, so dass alle Blätter Elemente von T sind?

5. Zeigen Sie, dass das folgende Problem *NP*-vollständig ist: Gegeben seien ein gerichteter Graph mit Kantengewichten $c : E(G) \to \mathbb{Z}$, zwei Knoten s, t aus $V(G)$ und eine ganze Zahl k. Es soll entschieden werden, ob es einen s-t-Weg der Länge höchstens k gibt.

Dieser Zettel wird nicht mehr bewertet.