Einführung in die Diskrete Mathematik
10. Übung

1. Sei (G, u, b, c) eine Instanz des MINIMUM-COST-FLOW-PROBLEMS. Sei $e_0 \in E(G)$ eine Kante mit $c(e_0) > (|V(G)| - 1) \max_{e \in E(G) \setminus \{e_0\}} |c(e)|$. Beweisen Sie die folgende Aussage: Wenn es einen b-Fluss g in (G, u) mit $g(e_0) = 0$ gibt, dann gilt $f(e_0) = 0$ für jede Optimallösung f. (3 Punkte)

2. Sei (G, u, b, c) eine Instanz des MINIMUM-COST-FLOW-PROBLEMS. Man nennt eine Funktion $\pi : V(G) \to \mathbb{R}$ ein *optimales Potential*, falls es einen b-Fluss f in (G, u) mit minimalen Kosten gibt, so dass π ein zulässiges Potential bezüglich (G_f, c) ist.

   (a) Man beweise, dass eine Funktion $\pi : V(G) \to \mathbb{R}$ genau dann ein optimales Potential ist, wenn für jedes $X \subseteq V(G)$ die folgende Ungleichung gilt:
   $$b(X) + \sum_{e \in \delta^-(X): c_\pi(e) < 0} u(e) \leq \sum_{e \in \delta^+(X): c_\pi(e) \leq 0} u(e). \qquad (*)$$

   (b) Man zeige, wie man in polynomieller Zeit für eine gegebene Funktion $\pi : V(G) \to \mathbb{R}$ entweder eine die Bedingung $(*)$ verletzende Menge X findet oder entscheidet, dass es keine solche gibt.

   (c) Zeigen Sie, wie man für ein gegebenes optimales Potential einen b-Fluss mit minimalen Kosten in $O(m + n^3)$ Zeit findet. (3+2+2 Punkte)

3. Man betrachte eine Verallgemeinerung des MINIMUM-COST-FLOW-PROBLEMS, bei der unendliche Kapazitäten erlaubt sind (d.h. $u(e) = \infty$ für manche Kanten e). Eine Instanz (G, u, b, c) heißt *unbeschränkt*, wenn es für jedes $\gamma \in \mathbb{R}$ einen b-Fluss f in (G, u) gibt mit $c(f) < \gamma$.

   (a) Man zeige, dass eine Instanz genau dann unbeschränkt ist, wenn es einen b-Fluss in (G, u) gibt und ein negativer Kreis existiert, dessen Kanten alle unendliche Kapazität haben.

   (b) Man zeige, wie man in $O(n^3 + m)$-Zeit entscheiden kann, ob eine Instanz unbeschränkt ist.

   (c) Man zeige, dass in einer nicht unbeschränkten Instanz jede unendliche Kapazität auf äquivalente Weise durch eine endliche Kapazität ersetzt werden kann. (2+1+2 Punkte)

4. Wir betrachten ein Verfahren, das aus dem SUKZESSIVE-KÜRZESTE-WEGE-ALGORITHMUS entsteht, indem man zwei Änderungen durchführt:

   - Man augmentiert stets um $\gamma' := \min \left\{ \min_{e \in E(P)} u_f(e), \quad \max\{b'(s), -b'(t)\} \right\}$.
   - Unter allen kürzesten s-t-Wegen im Residualgraphen wird der augmentierende P so ausgewählt, dass der zugehörige γ'-Wert maximal ist.

   Zeigen Sie, dass dieser Algorithmus ebenfalls nach höchstens $\frac{1}{2} \sum_{v \in V(G)} |b(v)|$ Augmentierungen terminiert. Zeigen Sie außerdem durch ein Beispiel, dass er mehr Augmentierungen benötigen kann als der (unveränderte) SUKZESSIVE-KÜRZESTE-WEGE-ALGORITHMUS. (4 Punkte)

Abgabe: Donnerstag, den 21.1.2016, vor der Vorlesung.