Wintersemester 2015/16
Prof. Dr. S. Hougardy
Dr. U. Brenner

Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Universität Bonn

Einführung in die Diskrete Mathematik
8. Übung

1. Sei (G, u, s, t) ein Flussnetzwerk, und seien $\delta^+(X)$ und $\delta^+(Y)$ minimale s-t-Schnitte in (G, u). Zeigen Sie, dass dann auch $\delta^+(X \cap Y)$ und $\delta^+(X \cup Y)$ minimale s-t-Schnitte in (G, u) sind. (4 Punkte)

2. Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter zusammenhängender Graph mit Kapazitäten $u : E \to \mathbb{R}_+$. Sei $\emptyset \neq A \subset V$, so dass $\delta(A)$ ein minimaler Schnitt in G ist.
   (a) Zeigen Sie, dass $u(\delta(A)) \leq \frac{2}{n} u(E)$ gilt (mit $u(E) := \sum_{e \in E} u(e)$).
   (b) Betrachten Sie das folgende Verfahren: Wählen Sie zufällig eine Kante und kontrahieren Sie sie, wobei eine Kante e mit Wahrscheinlichkeit $\frac{u(e)}{u(E)}$ genommen wird. Wiederholen Sie diese Vorgehensweise, bis nur noch zwei Knoten übrig sind (die Wahlen der einzelnen Kanten sollen dabei unabhängig voneinander sein). Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit, dass nie eine Kante aus $\delta(A)$ kontrahiert wird, mindestens $\frac{2}{(n-1)n}$ beträgt.
   (c) Zeigen Sie, dass man durch $kn(n-1)$ unabhängige Wiederholungen des Verfahrens aus (b) mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens $1 - e^{-2k}$ einen minimalen Schnitt in G erhält. (2+2+2 Punkte)

3. Sei (G, u, s, t) ein Netzwerk. Man nenne einen s-t-Präfluss f in (G, u) maximal, wenn $\mathrm{ex}_f(t)$ maximal ist.
   (a) Man zeige, dass es für jeden maximalen s-t-Präfluss f einen maximalen s-t-Fluss f' mit $f'(e) \leq f(e)$ für alle $e \in E(G)$ gibt.
   (b) Man zeige, wie man in $O(nm)$ Zeit einen maximalen s-t-Präfluss in einen maximalen s-t-Fluss umwandeln kann. (2+2 Punkte)

4. Sei (G, u, s, t) ein Netzwerk, $n = |V(G)|$, f ein s-t-Präfluss in (G, u) und ψ eine Distanzmarkierung bezüglich f mit $\psi(v) \leq 2n$ für alle $v \in V(G)$. Sei $\psi'(v) := \min\{\mathrm{dist}_{G_f}(v, t), n + \mathrm{dist}_{G_f}(v, s), 2n\}$ für alle $v \in V(G)$.
   Zeigen Sie: ψ' ist eine Distanzmarkierung bezüglich f, und es gilt $\psi(v) \leq \psi'(v)$ für alle $v \in V(G)$. (5 Punkte)

Abgabe: Donnerstag, den 7.1.2016, vor der Vorlesung.