Wintersemester 2015/16
Prof. Dr. S. Hougardy
Dr. U. Brenner

Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Universität Bonn

Einführung in die Diskrete Mathematik
5. Übung

1. Ein Telekommunikationsnetzwerk werde durch einen ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ modelliert, dessen Kanten voneinander unabhängige Ausfallwahrscheinlichkeiten $p : E \to [0, 1]$ haben. Wie findet man in Zeit $O(m + n \log n)$ einen spannenden Baum, der die Wahrscheinlichkeit, dass alle seine Kanten funktionieren, maximiert? (3 Punkte)

2. Zeigen Sie, wie man in einem gegebenen gerichteten Graphen ein Branching mit maximaler Kardinalität in linearer Laufzeit finden kann. (3 Punkte)

3. Berechnen Sie in dem Graphen, der in Abbildung 1 dargestellt ist, mit Hilfe des Algorithmus von Edmonds ein gewichtsmaximales Branching. Geben Sie auch die Graphen an (mit den zugehörigen Kantengewichten), die während des Algorithmus durch Kontraktion entstehen. (3 Punkte)

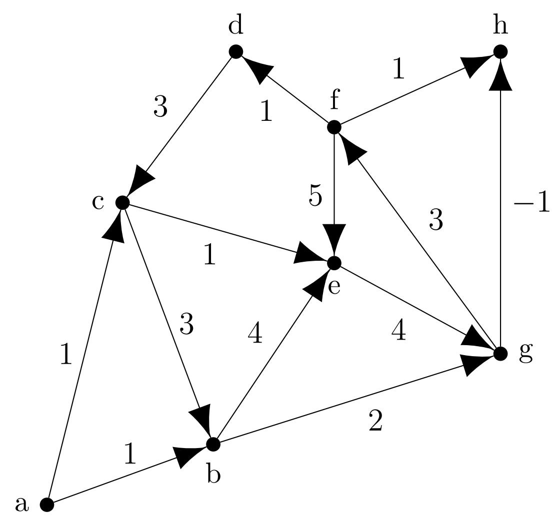

Abbildung 1: Instanz zur Berechnung eines maximal gewichteten Branchings.

4. Zeigen Sie, dass für jeden gerichteten Graphen G und jedes $r \in V(G)$ folgendes gilt: G ist genau dann die Vereinigung von k kantendisjunkten aufspannenden Arboreszenzen mit Wurzel r, wenn der zugrundeliegende ungerichtete Graph die Vereinigung von k kantendisjunkten aufspannenden Bäumen ist und $|\delta^-(x)| = k$ für alle $x \in V(G) \setminus \{r\}$ gilt. (5 Punkte)

5. Zeigen Sie, dass die Kantenmenge eines gerichteten Graphen G genau dann durch k Branchings überdeckt werden kann, wenn die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind:

   (a) $|\delta^-(v)| \leq k$ für alle $v \in V(G)$

   (b) $|E(G[X])| \leq k(|X| - 1)$ für alle $X \subseteq V(G)$.

   (5 Punkte)

Abgabe: Donnerstag, den 3.12.2015, vor der Vorlesung.