

## Einführung in die Diskrete Mathematik

### 2. Übung

1. Sei  $G = (V, E)$  ein stark zusammenhängender gerichteter Graph mit  $n$  Knoten. Zeigen Sie, dass  $G$  dann einen stark zusammenhängenden Teilgraphen  $G' = (V, E')$  mit  $|E'| \leq 2n - 2$  enthält. (3 Punkte)
2. Bestimmen Sie mit Hilfe des GRAPH-SCANNING-ALGORITHMUS alle Artikulationsknoten eines zusammenhängenden ungerichteten Graphen  $G$ . Dabei heißt ein Knoten  $v \in V(G)$  Artikulationsknoten, wenn  $G - v$  aus mehr Zusammenhangskomponenten besteht als  $G$ . (4 Punkte)
3. Wie kann man in linearer Zeit entscheiden, ob ein gerichteter Graph eine aufspannende Arboreszenz enthält? (4 Punkte)
4. Sei  $G$  ein ungerichteter Graph. Eine *Orientierung* von  $G$  ist ein gerichteter Graph, der aus  $G$  entsteht, indem jede ungerichtete Kante  $\{v, w\} \in E(G)$  durch eine der beiden gerichteten Kanten  $(v, w)$  und  $(w, v)$  ersetzt wird.  
Sei  $G$  nun außerdem zusammenhängend. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:
  - (a)  $G$  hat immer eine Orientierung, die azyklisch ist.
  - (b)  $G$  hat genau dann eine stark zusammenhängende Orientierung, wenn  $G$  keine Brücke enthält.
  - (c) Wenn  $G$  eine stark zusammenhängende Orientierung hat, dann ist  $G$  Eulersch.
  - (d) Wenn  $G$  Eulersch ist, dann hat  $G$  eine stark zusammenhängende Orientierung. (2+2+2+2 Punkte)