Wintersemester 2013/14 Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Prof. Dr. J. Vygen Universität Bonn
Dr. U. Brenner

Einführung in die Diskrete Mathematik

7. Übung

1. Im Tagebau sollen Rohstoffe gefördert werden. Jeder Kubikmeter Gestein wird durch einen Knoten in einem gerichteten Graphen G modelliert. Eine Kante $(v, w) \in E(G)$ bedeutet, dass v nicht abgebaut werden kann, ohne dass auch w abgebaut wird (zum Beispiel weil w oberhalb von v liegt). Der Abbau von einem Kubikmeter Gestein $v \in V(G)$ bringt einen (möglicherweise negativen) Gewinn $p(v)$. Wie bestimmt man effizient eine abzubauende Menge $X \subseteq V(G)$, die den maximalen Gewinn $p(X)$ bringt? (4 Punkte)

2. Sei G ein ungerichteter Graph mit MA-Reihenfolge $v_1, \dots, v_n$. Für $u, v \in V(G)$ sei κ_{uv}^G die maximale Anzahl intern disjunkter u-v-Wege in G. Beweisen Sie, dass dann $\kappa_{v_{n-1}v_n}^G = |\delta_G(v_n)|$ gilt. (5 Punkte)
Hinweis: Man beweise mittels Induktion, dass $\kappa_{v_j v_i}^{G_{ij}} = |\delta_{G_{ij}}(v_j)|$ gilt, wobei $G_{ij} = G[\{v_1, \dots, v_i\} \cup \{v_j\}]$. Dazu nehme man o.B.d.A. $\{v_j, v_i\} \notin E(G)$ an (überlegen Sie auch, warum das keine Einschränkung ist), wähle eine inklusionsminimale Menge $Z \subseteq \{v_1, \dots, v_{i-1}\}$, die v_j und v_i trennt, und lasse $h \le i$ die maximale Zahl sein, so dass $v_h \notin Z$ und v_h mit v_i oder v_j benachbart ist (falls es ein solches h gibt).

3. Sei (G, u, c, b) eine Instanz des Minimum-Cost-Flow-Problems. Man nennt eine Funktion $\pi : V(G) \to \mathbb{R}$ ein *optimales Potential*, falls es einen b-Fluss f in (G, u) mit minimalen Kosten gibt, so dass π ein zulässiges Potential bezüglich (G_f, c) ist.

   (a) Man beweise, dass eine Funktion $\pi : V(G) \to \mathbb{R}$ genau dann ein optimales Potential ist, wenn für jedes $X \subseteq V(G)$ die folgende Ungleichung gilt:
   $$b(X) \ + \sum_{e \in \delta^-(X): c_\pi(e) < 0} u(e) \ \le \sum_{e \in \delta^+(X): c_\pi(e) \le 0} u(e). \qquad (*)$$

   (b) Man zeige, wie man in polynomieller Zeit für eine gegebene Funktion $\pi : V(G) \to \mathbb{R}$ entweder eine die Bedingung $(*)$ verletzende Menge X findet oder entscheidet, dass es keine solche gibt.

   (c) Zeigen Sie, wie man für ein gegebenes optimales Potential einen b-Fluss mit minimalen Kosten in $O(m + n^3)$ Zeit findet. (4+2+2 Punkte)

4. Sei (G, u, c, b) eine Instanz des Minimum-Cost-Flow-Problems, für das eine zulässige Lösung existiere. Zeigen Sie, dass es dann eine kostenminimale Lösung f gibt, für die eine Kantenmenge $F \subseteq E(G)$ existiert, so dass der $(V(G), F)$ zugrundeliegende ungerichtete Graph kreisfrei ist und auf allen Kanten $e \in E(G) \setminus F$ gilt: $f(e) \in \{0, u(e)\}$. (3 Punkte)

Abgabe: Dienstag, den 3.12.2013, vor der Vorlesung.