Wintersemester 2011/12 — Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik

Prof. Dr. S. Hougardy — Universität Bonn

Dr. U. Brenner

Einführung in die Diskrete Mathematik

7. Übung

1. Sei G ein gerichteter Graph mit $r \in V(G)$. Für jeden Knoten aus $v \in V(G) \setminus \{r\}$ gebe es k kantendisjunkte r-v-Wege in G, aber die Herausnahme eine beliebigen Kante zerstört diese Eigenschaft. Zeigen Sie, daß jeder Knoten in $V(G) \setminus \{r\}$ genau k eingehende Kanten hat. (4 Punkte)

2. Sei G ein gerichteter Graph mit Kantengewichten $c : E(G) \to \mathbb{R}_+$. Seien $s, t \in V(G)$, $L \subseteq V(G)$ mit $L \neq \emptyset$, so daß von jedem Knoten aus jedes Element von L erreichbar ist, und $\pi(v) := \min \left\{0, \min_{l \in L} \left(\mathrm{dist}_{(G,c)}(t,l) - \mathrm{dist}_{(G,c)}(v,l)\right)\right\}$ für $v \in V(G)$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

   (a) π ist ein zulässiges Potential.

   (b) Jeder kürzeste s-t-Weg in (G, c_π) ist ein kürzester s-t-Weg in (G, c).

   (c) $\left\{v \in V(G) \mid \mathrm{dist}_{(G,c_\pi)}(s,v) < \mathrm{dist}_{(G,c_\pi)}(s,t)\right\} \subseteq \left\{v \in V(G) \mid \mathrm{dist}_{(G,c)}(s,v) < \mathrm{dist}_{(G,c)}(s,t)\right\}$. (4 Punkte)

   Bemerkung: Wenn man eine große Anzahl von Kürzeste-Wege-Berechnungen im selben Graphen aber mit unterschiedlichen Start- und Endknoten durchführen muss, kann es sich lohnen, vorher Abstände zu einer gewissen Menge L von Knoten zu berechnen, die als Orientierungspunkte dienen. Unter Ausnutzung der in diesem Satz bewiesenen Eigenschaften kann man damit die Aufrufe des DIJKSTRA-ALGORITHMUS in der Praxis beschleunigen.

3. Sei G ein Graph mit Kantenlängen $c : E(G) \to \mathbb{R}_+$ und $s, t \in V$. Wir wollen einen kürzesten s–t–Weg finden, indem wir Dijkstras Algorithmus von beiden Knoten s und t aus starten. Wir stoppen, sobald ein Knoten $v \in V$ aus *beiden* Priority Queues entfernt wurde.

   a) Geben Sie ein Beispiel an, in dem dann $v.\mathrm{Abstand}_s + v.\mathrm{Abstand}_t > \mathrm{dist}(s,t)$ gilt.

   b) Wie findet man mit dieser Abbruchbedingung dennoch einen kürzesten s–t–Weg? (4 Punkte)

4. Sei G ein gerichteter Graph mit konservativen Kantengewichten $c : E(G) \to \mathbb{R}$. Seien $s, t \in V(G)$, wobei t in G von s aus erreichbar sei. Man zeige: Die minimale Länge eines s-t-Weges in G ist gleich dem maximalen Wert von $\pi(t) - \pi(s)$, wobei π ein zulässiges Potenzial von (G, c) sei. (4 Punkte)

Abgabe: Dienstag, den 29.11.2011, **vor** der Vorlesung.