Wintersemester 2010/11 | Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Prof. Dr. J. Vygen | Universität Bonn
Dr. U. Brenner

Einführung in die Diskrete Mathematik
10. Übung

1. Ein Graph heißt k-*regulär*, wenn jeder Knoten Grad k hat. Man beweise, dass ein k-regulärer bipartiter Graph k paarweise disjunkte perfekte Matchings besitzt. Man folgere daraus, dass die Kantenmenge eines bipartiten Graphen mit maximalem Grad k in k Matchings partitioniert werden kann. (4 Punkte)

2. (a) Sei $S = \{1, \dots, n\}$ und $0 \leq k < \frac{n}{2}$. Sei A bzw. B die Familie aller k-elementigen bzw. $(k+1)$-elementigen Teilmengen von S. Man bilde den bipartiten Graphen

$$G = (A \dot{\cup} B, \{\{a, b\} \mid a \in A, b \in B, a \subset b\})$$

und beweise, dass G ein A überdeckendes Matching besitzt.

   (b) Folgern Sie daraus Sperners Lemma: Die maximale Anzahl der Teilmengen einer n-elementigen Menge mit der Eigenschaft, dass keine der Teilmengen eine andere enthält, ist $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$. (4 Punkte)

3. Man beschreibe eine Turingmaschine auf dem Alphabet $\{0, 1\}$, die eine natürliche Zahl x mit 3 multipliziert. Die Eingabe bestehe aus einer binären Kodierung von x, und nach der Berechnung soll auf dem Band nur eine Zeichenkette stehen, die $3x$ binär kodiert (bei der binären Darstellung von natürlichen Zahlen sollen dabei keine führenden Nullen auftreten). (4 Punkte)

Abgabe: Dienstag, den 21.12.2010, **vor** der Vorlesung.

Hinweis auf die nächste Mentoren-Veranstaltung:
Die Mentorengruppe des Forschungsinstituts für Diskrete Mathematik trifft sich am Donnerstag, den 16. Dezember um 18 Uhr im Konferenzraum des Arithmeums. Pascal Welke stellt seine Bachelorarbeit „Optimale Landmarkmengen in Graphen“ vor. Alle interessierten Studenten sind herzlich eingeladen.