Lineare und Ganzzahlige Optimierung

WS 2008/2009

Übungszettel 6

Aufgabe 1:
Betrachten Sie das folgende LP:

$$\max\ 2x_1 - x_2 + x_3$$

$$\begin{aligned} \text{s.t.} \quad 3x_1 + x_2 + x_3 &\leq 60 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &\leq 10 \\ x_1 + x_2 - x_3 &\leq 20 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Eine Basislösung hierfür ist $(x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3) = (10, 0, 0, 30, 0, 10)$, wobei die s_i jeweils die Schlupfvariablen der entsprechenden Zeilen angeben. Stellen Sie das zu dieser Basislösung gehörige Simplex-Tableau auf, lösen Sie das LP mit dem Simplex-Verfahren, und geben Sie die erhaltene Lösung an.

(4 Punkte)

Aufgabe 2:
Sei $E(A, x) \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Ellipsoid und $a \in \mathbb{R}^n$. Sei ferner hierzu $E(A', x')$ der Löwner-John-Ellipsoid wie in der Vorlesung. Zeigen Sie:

$$\{z \in E(A, x) \mid az \geq ax\} \subseteq E(A', x').$$

(4 Punkte)

Aufgabe 3:
Beweisen Sie folgende Sätze aus der Vorlesung:

a) Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph mit Inzidenzmatrix A und sei $F \subseteq E$. Dann gilt:

   (V, F) enthält keinen ungerichteten Kreis dann, und nur dann, wenn die Spalten von A mit Index in F, also $\{a_{\cdot,e} \mid e \in F\}$, linear unabhängig sind.

b) Betrachte ein MCF-ILP $\min\{cx \mid Ax = b \wedge 0 \leq x \leq u\}$. Sei x eine zulässige Baumlösung und y die zu x entsprechenden Knotenpotentiale. Ferner gelten folgende Eigenschaften:

   - $y_i + c_{i,j} < y_j \Rightarrow x_{i,j} = u_{i,j}$,
   - $y_i + c_{i,j} > y_j \Rightarrow x_{i,j} = 0$.

   Dann ist x optimal.

(5 Punkte)

Aufgabe 4:
Gegeben ist ein gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit Kapazitäten c_e 0 auf den Kanten $e \in E$ und k *Terminalpaare* (s_i, t_i), mit $s_i, t_i \in V$ für $i = 1, 2, \ldots, k$. Zu jedem Terminalpaar (s_i, t_i) gehört ein Gut i, das in dem gerichteten Graphen G von s_i nach t_i transportiert werden soll. Dabei darf die Summe aller Güter, die über eine Kante $e \in E$ transportiert werden, die Kapazität c_e nicht überschreiten. Ziel ist es, die Gesamtmenge aller transportierten Güter zu maximieren.
Formulieren Sie das beschriebene *Mehrgüter-Fluss-Problem* als lineares Programm.

(3 Punkte)

Abgabe: Donnerstag, den 4.12.08, **vor** der Vorlesung